புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்-II

தி. கோவிந்தராசன்

கொ. முத்துசாமி

தமிழ் வெளியீட்டுக் க

தமிழக அ

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் - 165

புகுமுக வகுப்புக்

கணித நூல் - II

ஆசிரியர்கள் :

தி. கோவிந்தராசன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

கொ. முத்துசாமி, எம்.எஸ்ஸி.,
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—July, 1968

B. T. P. No. 165

© Bureau of Tamil Publications

MATHEMATICS FOR THE P.U.C.

T. GOVINDARAJAN & K. MUTHUSAMY

Price Rs. 4-50

Printed by
Manickam Press
Madras-29

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், *தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்*)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி ஏழு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்து வருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன் வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும், மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பலதுறைகளில் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல் II'** என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் **165** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **200** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலை மண்டபத்தில் கொலு வீற்றிருக்கிறாள். எனவே இவ்வன்னையை வாழ்த்துவோமாக; உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

உள்ளடக்கம்

வடிவ கணிதம்
(Geometry)

கோண கணிதம்
(Trigonometry)

முன்னுரை
(Introduction) :

I. (1) மனிதனுக்கு அடிப்படையாக அன்றாட வாழ்க்கையில் தேவைப்பட்டது, இன்னும் தவிர்க்கமுடியாதபடி தேவைப்படுவது, எண்ணு(எண்ணிக்கையு)ம் அளவும். பொருள்களை எண்ணுகிறோம், பொருள்களை அளக்கிறோம். காலத்தை அளவு கொண்டு அளக்கிறோம். காலப்போக்கை, விநாடி, நிமிடம், நாள், வாரம், திங்கள், ஆண்டு எனக் கணக்கிடுகிறோம்.

நீளம், எடை, காலம் மூன்றையும் அவைகளுக்கென வகுக்கப்பட்ட அலகுகள் கொண்டு அளக்கிறோம்.

நீளமும், நீளத்தை யொட்டிய பரப்பும் பருமனும் கணிதத்தில் வடிவகணிதத் துறையில் இடம் பெறுவனவாகும்.

எடை, விஞ்ஞானத்தில், சிறப்பாகப் பூதநூல் (Physics), வேதிநூல் (Chemistry)களில் இடம் பெறுவதாகும்.

காலம், வானியல் அடிப்படையில் கணிக்கப் பட்டு, அன்றாட வாழ்வில் இடம் பெறுகின்றது.

I. (2) ஏறக்குறைய கி. மு. 2000 ஆண்டுகளுக்கு முன், "எண்ணிக்கை"யும் "அளவு"ம் சமூக வாழ்க்கையில் கணிசமான அளவு முற்போக்கடையவில்லை. அதற்குப் பின்னர் தான், "அளவு" முறைகள் சிறுகச் சிறுக உருப்பெற ஆரம்பித்தன. உருவங்களைப் பற்றிய முறையான அறிவியல் துறை வளரவில்லையாயினும், செய்முறையில் உருவங்களைப் பற்றிய அறிவு, பல நாடுகளின் வரலாற்றிலே, ஓரளவு வளர்ந்தே இருந்ததென நம்புவதற்குப் பல சான்றுகள் உள்ளன. முக்கோணங்களைப் பற்றிய அறிவு எந்த அளவுக்கு மனித சாதியிடை வளர்ந்திருந்தது என்பதற்கு அழியாப் பெருஞ்சான்று சீயாப்ஸின் பெரும் பட்டைக் கூம்பாகும் (The Great Pyramid of Cheops).

I. (3) மனிதன் வெகுகாலம், மணல்மேல் கோடுகள் வரைந்து, வடிவகணித நுட்பங்களைப் பற்றிய அறிவை வளர்த்து வந்திருக்கிறான். பண்டைய கிரேக்க விஞ்ஞானி ஆர்க்கிமிடீஸ் (Archimedes), கடல் மணலில் இவ்வாறு படம் வரைந்து, அவ் வடிவங்களைப் பற்றி ஆழ்ந்த சிந்தனையிலிருந்தபோதுதான், அவனை உரோம் பேரரசின் இராணுவத்தினர் குத்திக் கொலை செய்தனர் என்பது வரலாறு.

I. (4) நெடுங்காலம் வளர்ந்துவந்த வடிவகணித முடிவுகளை வகைப்படுத்தி முதன் முதலில் ஒழு முழு நூலாக்கித் தந்த பெருமை யூகிளிட் (Euclid) என்ற வடிவ கணித மேதையைச் சாரும். அவன் எழுதிய 12 நூல்கள் (Twelve Books of Euclid) வடிவ கணித வரலாற்றில் தொன்மையும் சிறப்பும் வாய்ந்த ஓர் பெரும் எல்லைக் கல்லாகும். அவன் காலம் ஏறக்குறைய கி. மு. மூன்றும் நூற்றுண்டென்னலாம். இன்றும் அவன் எழுதிய அடிப்படையில் தான் பெரும்பாலும் வடிவ கணிதம் கற்கப்படுகிறது. சென்ற நூற்றுண்டில் வடிவகணிதப் பெரும் பிரிவாய், இவ்வியலில் ஒரு பெரும் புரட்சியையும், திருப்பத்தையும் செய்த யூகிளிட் முறைக்குப் புறம்பான வடிவகணித இயல் (Non - Euclidean geometry), உருவாகி வளர ஆரம்பித்தது.

I. (5) யூகிளிட் அடிப்படையில்,

(i) சர்வசமம் (Congruence), இணைக் கோடுகளின் பண்புகள், பிதகோராஸ் தேற்றம் ;

(ii) $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ போன்ற முற்றொருமைகளை வடிவகணித அமைப்பில் நிறுவுதல் ;

(iii) வட்டங்களும், அவைகளின் பண்புகளும், முதலியன பற்றிய தேற்றங்களை நீங்கள் பள்ளி வகுப்புக்களில் கற்றறிந்திருப்பீர்கள்.

இப்போது மேலும்,

(iv) சுற்று வட்டங்கள், தொடு வட்டங்கள் ;

(v) விகிதம் (வடிவகணித முறைப்படியறிதல்) ;

(vi) வடிவொத்த முக்கோணங்கள், பல்கோணங்கள் முதலியவை பற்றி ஓரளவு அறிய முற்படுவோம்.

II. (1) திசைக்கோடுகள் (Directed lines or vectors) :

இன்று நிலவும் வடிவகணித இயலில் நீளங்களுக்கு ஒரு குறியீடு—(கூட்டுமதிப்பு, Positive value; குறை மதிப்பு, Negative value)—தந்து, விளக்கம் செய்வது வழக்கிலுள்ளது.



(படம் 1)

படத்தில் காட்டியபடி A, B என இரு புள்ளிகள் ஒரு நேர்க்கோட்டால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. A,Bக்கு இடைப் பட்ட நேர்க்கோட்டு நீளத்தை, AB அல்லது BA என எவ்வித பாகுபாடுமின்றி நாம் சாதாரணமாகக் குறிப்பிட்டு வந்திருக் கிறோம். ஆனால், AB என்ற நீளத்தைக் குறிப்பிடும்போது ABன் நீளத்தைக் குறிப்பிடுவதோடு நின்றுவிடாமல், எத் திசையில் அது அளக்கப்படுகிறது, அதாவது Aலிருந்து AB என்ற திசையில் அளக்கப்படுகிறது என்பதையும் குறிப் பிடுவது பயன் தருவதாயமைகிறது. சுருக்கமாக, நீளம், திசை இரண்டையும் ஒருங்கே குறிப்பிடுவது பயன் பயக் கிறது.

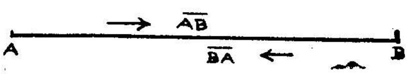
II. (2) அப்போது AB என்ற நீளப் பகுதியை ஒரு போக்குள்ள கோடு (A directed line) அல்லது திசைக்கோடு (Vector) என்று கூறுவது மரபு. $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ என்ற குறியீடுகளோடு, இத்திசைக் கோடுகளைக் குறிப்பது வழக்கம். இப்படி எழுதும்போது,

$\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ என்ற குறியீட்டமைப்பு,

(1) ஒரு குறிப்பிட்ட நீளமுள்ளது;

(2) ஒரு குறிப்பிட்ட திசையிலுள்ளது; (அதாவது Aலிருந்து Bக்குச் செல்லும் நேர்க் கோட்டுத் திசை) என்ற இரு செய்திகளை ஒருங்கே குறிப்பிட்டுச் சொல்வதாகும்.

ஆகவே $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ இரண்டும் வெவ்வேறு. அவைகளின் அளவுகள் சமமாயினும், அவை நேரெதிர்த்திசைகளில் அளக் கப்படுகின்றன.



(படம் 2)

$\overline{AB}$ ஐ கூட்டுத் திசைக் கோடாகக் கொண்டால், $\overline{BA}$ ஐ அதற்கு அளவில் சமமான கழிவுத் திசைக் கோடெனக் கொள்ள வேண்டும். இதன்படி,

$\overline{AB} = -\overline{BA}$ என்றோ,

$\overline{BA} = -\overline{AB}$ என்றோ, சொல்லலாம்.

A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் கொள்ளப்பட்டு, நீளம் AB = நீளம் CD எனவும் கொள்ளப்பட்டு ABம், CDம் ஒரே திசையில் அளக்கப்பட்டால் தான்,

$\overline{AB} = \overline{CD}$

[இதைப் படிப்பது 'திசைக்கோடு' AB = திசைக்கோடு CD]

II. (3) திசைக் கோட்டுக் கூட்டல் (எளியவை): A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் எப்படி அமைந்திருந்தாலும், திசைக்கோட்டு மரபுப்படி $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ என்பது உண்மையாகும்.

கீழ்க்கண்ட படங்களைப் பார்க்க :



(படம் 3)

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$



(படம் 4)

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}-\overline{CB}$$
$$=\overline{AC}$$



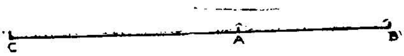
(படம் 5)

$$\overline{AB}+\overline{BC}=-\overline{BA}+\overline{BC}=\overline{BC}-\overline{BA}$$
$$=\overline{AC}$$



(படம் 6)

$$\overline{AB}+\overline{BC}=-\overline{BA}+\overline{BC}$$
$$=\overline{BC}-\overline{BA}$$
$$=-\overline{CA}$$
$$=\overline{AC}$$



(படம் 7)

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} - \overline{CB}$$
$$= -\overline{CA}$$
$$= \overline{AC}$$



(படம் 8)

$$\overline{AB} + \overline{BC} = -\overline{BA} - \overline{CB}$$
$$= -\overline{CB} - \overline{BA}$$
$$= -\overline{CA}$$
$$= \overline{AC}$$

III. (1) **விகிதமும், விகித சமமும்:** வடிவ கணிதத்தில், நீளம், பரப்பு, கோணம் முதலியவற்றின் அளவுகளைப் பற்றியும் அவைகளை ஒப்பிடும் முறைகளைப் பற்றியும் சில முடிவுகளைப் பார்ப்போம்.

"இரு கோடுகளின் நீளங்கள் அல்லது இரு உருவங்களின் பரப்புக்கள் போன்ற இரு அளவுகள் இருக்குமானால், அவை ஒரே வகையான அளவுகள் (Magnitudes of the same kind) எனக் கூறப்படும். ஒரே வகையான அளவுகளைத் தான் நாம் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்"

இந்த நிலையில் இந்நூலில் இயற்கணிதப் பிரிவில், பகுதி 6 – "விகிதமும் விகித சமமும்" என்ற பகுதியைப் படிக்கவும். அங்கு நிறுவப்பட்ட பல முடிவுகள் வடிவ கணிதத்தில் பல தேற்றத் தெரிப்புக்களில் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படும்.

III. (2) சாதாரணமாக, இரு கோடுகளின் நீளங்கள், a, b செ. மீ. ஆக விருப்பின், அக் கோடுகளின் நீள விகிதம் $\frac{a}{b}$ அல்லது $a : b$ என நீங்கள் அறிவீர்கள்.

III. (3) இப்போது, திசைக் கோடுகளைப் பற்றி நாம் கொண்ட கருத்துக்களை மனதிற் கொண்டு, AB என்ற நேர்க் கோட்டில் P என்ற புள்ளி, A, Bக்கும் இடைப்பட்டோ, அல்லது ABன் நீட்டலிலோ, இருக்குமானால் $\frac{AP}{PB}$ என்ற விகிதத்தின் குறிகளைப் பார்ப்போம்.

III. (4) பொதுவாக, இடதுபுறமிருந்து, வலதுபுறம் செல்லும் $\overrightarrow{AB}$ என்ற திசையைக் கூட்டுத் திசை யெனவும் (Positive direction), $\overrightarrow{BA}$ என்ற திசையைக் கழிவுத் திசை யெனவும் (Negative direction) கொள்வது மரபு. (மறுதலையாகக் கொள்வதிலும் குறையேதுமில்லை. ஆனால் அப்படிப்பட்ட மரபு சாதாரண வழக்கிலில்லை. இருந்த போதிலும், அவ்வாறு கொண்டு, அதையே கடைசிவரை கடைப்பிடிப்பதால் பெறப்படும் முடிவுகள் ஏதும் முரண்படாது, மாறாது)



(படம் 9)



(படம் 10)

இதை யொட்டி, பின் கண்ட விகிதங்களின் குறியீடுகள் காண்போம்.



(படம் 11)

(*a*) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ = கூட்டு விகிதம்.

(*b*) $\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}}$ = கூட்டு விகிதம்.

(*c*) $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ = கழிவு விகிதம்.



(படம் 12)

(*a*) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ = கழிவு விகிதம்.

(*b*) $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ = கூட்டு விகிதம்.

(c) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$ = கூட்டு விகிதம்.

எனவே AB என்ற நேர்க்கோட்டில், Aக்கும், Bக்கும், இடையில் P இருக்குமானால் $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ = கூட்டு விகிதம். ABன் நீட்டலில் P இருக்குமானால், $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ = கழிவு விகிதம்.

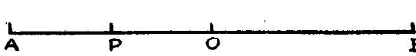
III. (5) விகிதக் குறியீடுகள் கட்டாயம் தெரிவிக்கப்படத் தான் வேண்டும், அந்தக் குறியீடுகளைக் கணக்கில் கொண்டு தான் தேற்றத் தெரிப்புக்கள் அமைத்து முடிவுகாண வேண்டும் என்ற இன்றியமையாமை அல்லது நிர்ப்பந்தம் ஏற்படும் போது, விகிதக் குறியீடுகளை விழிப்போடு நாம் பார்த்துக் கொள்ள வேண்டும். இந்நூலில் 11, 12, 13ம் தேற்றங்களில் விகிதக் குறியீடுகள் முக்கிய இடம் பெறுகின்றன.

ஆனால், சில இடங்களில், விகிதக் குறியீடுகள் அவ்வளவு முக்கியமாகத் தேவைப்படாமலிருக்கலாம். திசைகளைப்பற்றிய முக்கியத்துவம் இல்லாவிடத்தில் குறியீடு முக்கியம் பெறாது.

III. (6) ஒரு நேர்க் கோட்டை, ஒரு புள்ளி உள்ளே அல்லது வெளியே ஒரு விகிதத்தில் பிரிக்கும்போது, உட்பிரிவுக்குக் கூட்டு விகிதக் குறியீடும், வெளிப்பிரிவுக்குக் கழிவு விகிதக் குறியீடும் இன்றியமையாது குறிப்பிட வேண்டியிருக்கும். சில இடங்களில் தனி விகித மதிப்பு (Absolute value of the ratio) மட்டும் குறிப்பிட்டால் போதுமானதாகும். தேவைக்குத் தகுந்தபடி, பயன் படுத்திக் கொள்க.

III. (7) பல் விகிதப் பிரிவுகள் (Division in various ratios):

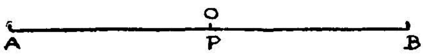
$\overline{AB}$ என்ற திசைக்கோடு, Aக்கும் Bக்கும் இடைப்பட்ட P என்ற புள்ளியில் $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப் பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்வோம். $\frac{m}{n}$ கூட்டு மதிப்புடையதாகும். ABன் மையப் புள்ளி O எனக் கொள்க.



(படம் 13)



(படம் 14)



(படம் 15)

$\frac{m}{n}$ என்ற விகிதத்தில் $m<n$ ஆக, $m>n$ ஆக, $m=n$ ஆக எப்படி வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.

(i) $m<n$ ஆனால், $\frac{m}{n}<1$ ஆகும்; அப்போது $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < 1$ அதாவது $\overline{AP}<\overline{PB}$; அப்போது Aக்கும் Oக்கும் இடையில் P இருக்கும். (படம் 13)

(ii) $m>n$ ஆனால் $\frac{m}{n}>1$ ஆகும்; அப்போது $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} >1$ அதாவது $AP>PB$; அப்போது Oக்கு அப்பால் Bக்கு முன்பாக P இருக்கும். (படம் 15)

(iii) $m=n$ ஆனால் $\frac{m}{n}=1$ ஆகும்; அப்போது $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 1$ அதாவது $\overline{AP}=\overline{PB}$; இங்கு O, P இரண்டும் ஒன்றும். (படம் 15)

இப்போது சிறப்பாக Pம் Aம் ஒன்றும் போது $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{0}{\overline{AB}} = 0$ ஆகும். Pம் Bம் ஒன்றும்போது $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AB}}{0} = \propto$ (கந்தழி) ஆகும்.

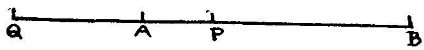
III. (8) இப்போது ABஐ, வெளியே Q என்ற புள்ளியில் $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{m}{-n}$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், Q என்ற புள்ளி

$\overline{AB}$ ன் நீட்டலில் Bக்கு வலப்புற மிருக்குமா அல்லது $\overline{BA}$ ன் நீட்டலில் Aக்கு இடப்புறமிருக்குமா என்பதைத் தெளிவு படுத்துவோம். [இப்படியான Q என்ற புள்ளியை நாம் இடங் குறித்தால் AB என்னும் நேர்க்கோடு முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளில் உள்ளும் புறமும் ஒரு விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்

டிருக்கின்றது எனக் கூறப்படும்; ஏனெனில் திசைக் குறியை நீக்கிப் பார்த்தால் $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} = \frac{AQ}{QB}$ ஆகும்]

முதலில் திசைக் குறியீட்டை விலக்கி, Qஐ இடங்குறிக்க முயல்வோம்.

(1) $m<n$ ஆனால் $\frac{m}{n}<1$ ஆகும்; அப்போது $\frac{AQ}{QB}<1$ அதாவது $AQ<QB$; எனவே Q என்ற புள்ளி, Aக்கு இடப்பக்கம் இருக்கும்.



(படம் 16)

(2) $m>n$ ஆனால் $\frac{m}{n}>1$ ஆகும்; அப்போது $\frac{AQ}{QB}>1$ அதாவது $AQ>QB$, எனவே Q என்ற புள்ளி Bக்கு வலப்புறமிருக்கும்.



(படம் 17)

(3) $m=n$ ஆனால் $\frac{m}{n}=1$ ஆகும்; அப்போது $\frac{AQ}{QB}=1$ அதாவது $AQ=QB$.

எனவே Q என்ற புள்ளி Aக்கு இடப்பக்கமோ, Bக்கு வலப்பக்கமோ இருக்க முடியாது;

ஏனெனில் Aக்கு இடப்பக்க மிருப்பின் $AQ<QB$ (திசை விலக்கி நீள அளவில்); Bக்கு வலப்பக்கமிருப்பின் $AQ>QB$ (திசை விலக்கி நீள அளவில்).

இந்த நிலையை, சற்று மேலும் ஆராய்வோம்; $\overline{AB}$ன் நீட்டலில் Bக்கு வலப்பக்கம் Q நகர்ந்து போய்க்கொண்டே இருக்குமானால், Q மிகமிக தூரம் போகும்போது, $\frac{AQ}{QB}$ன் மதிப்பு 1 என்ற எல்லையை நெருங்கும். இந்த உண்மையை Q கந்தழியிலிருந்தால் $\frac{AQ}{QB}=1$ எனக் கூறுவது மரபு; Q கந்தழிப்புள்ளி (Point at infinity) எனப் பெயர் பெறும்.

இதற்கு மாருக, $\overline{BA}$ன் நீட்டலில், Aக்கு இடப்புறமாக, Q நகர்ந்து சென்று, வெகுதூரம் போகுமாளுல் $\frac{AQ}{QB}$ன் மதிப்பும் 1 என்ற எல்லையை நெருங்கும். இந்த உண்மையையும், Q கந்தழியிலிருந்தால் $\frac{AQ}{QB}=1$ எனக் கூறுவது மரபு; இங்கு Q கந்தழிப்புள்ளி எனப்படும்.

எனவே $\frac{AQ}{QB}=1$ என்ற விகிதத்தில் $\overline{AB}$ன் நீட்டலிலோ $\overline{BA}$ன் நீட்டலிலோ Q என்ற ஒரு வரம்புக்குட்பட்ட புள்ளியை இடங்குறிக்க முடியாது.

IV. இவ்வடிவ கணிதப் பகுதியில் நிறுவப்பட்டிருக்கின்ற 19 தேற்றங்களை, பாகுபடுத்திக் கூறலாம்.

தேற்றம் 1 முதல் 3 வரை :	விகிதமும் விகித சமமும்.
தேற்றம் 4 முதல் 10 வரை :	வடிவொத்த முக்கோணங்களும் பல்-கோணங்களும்
தேற்றம் 11 முதல் 13 வரை :	ஒருவரைமையும், சந்திப்பும்.
தேற்றம் 14 முதல் 19 வரை :	முக்கோணமும், அதற்குரிய, கோடுகள், வட்டங்கள் அவைகளுக்கிடைப்பட்ட தொடர்புகளும்.

இத்தேற்றங்களை யொட்டிய சில செய்முறைப் பயிற்சிகளும் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

V. வடிவ கணிதப் பகுதியின் கடைசியில், நிறுவப்பட்ட 19 தேற்றங்களின் ஆங்கில மொழி பெயர்ப்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

VI. சிறப்பாக (1) ஒவ்வொரு தேற்றமும் பொது விவரணம் (General Enunciation) ஆகையால், தேற்றம் மட்டும் கொட்டை எழுத்துக்களில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

(2) சிறப்பு விவரணம், "சி. வி" என்ற குறுக்கத்தால் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது (Particular Enunciation);

(3) வரைவழி, "வ.வ" என்ற குறுக்கத்தால் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது (Construction);

(4) தெரிப்பு, "தெ" என்ற குறுக்கத்தால் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது (Proof).

மற்றக் குறியீடுகளும், குறுக்கங்களும் சாதாரண வழக்கிலுள்ளவையாம்.

1. விகிதமும் விகிதசமமும்

(Ratio and Proportion):

தேற்றம் 1

ஒரு குறிப்பிட்ட நீளமுள்ள நேர்க்கோட்டை உள்ளும், வெளியும், ஒரே ஒரு புள்ளியில்தான் ஒரு குறித்த விகிதத்தில் பிரிக்க முடியும்.

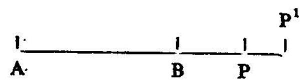
சிறப்பு விவரணம்: (சி - வி) : AB ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்க்கோடு. அது P என்ற புள்ளியில் [படம் 18 (a) - உட் பிரிவு; படம் 18 (b) - வெளிப் பிரிவு] $p : q$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது.

நிறுவ வேண்டியது : (நி. வே.): ABஐ, வேறோர் புள்ளியில் $p : q$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்க முடியாது என நிறுவ வேண்டும்.



(a)

(உட்பிரிவு)



(b)

(வெளிப்பிரிவு)

(படம் 18)

தெரிப்பு: (தெ): முடியுமானால் ABஐ P^1 என்ற புள்ளியிலும் $p : q$ என்ற அதே விகிதத்தில் உள்ளும் [18 (a)], வெளியும் [18 (b)] பிரிக்கலாமெனக் கொள்வோம்.

அதாவது, $\frac{AP^1}{P^1B} = \frac{p}{q}$ என்பதும் முடியுமெனக் கொள்வோம்.

18 (a) உட்பிரிவு :

அப்போது, $\frac{p}{q} = \frac{AP}{PB} = \frac{AP^1}{P^1B}$

$$\therefore \quad \frac{AP}{PB} + 1 = \frac{AP^1}{P^1B} + 1$$

அதாவது, $\frac{AP+PB}{PB} = \frac{AP^1+P^1B}{P^1B}$

அதாவது $\frac{AB}{PB} = \frac{AB}{P^1B}$

ஆகவே $PB = P^1B$ என்பது நிறுவப்படுகிறது.

எனவே, P, P^1 இரண்டும் வெவ்வேறு புள்ளிகள் அல்ல, ஒரே புள்ளிதான் என்பது நிறுவப்படுகிறது. எனவே AB ஐ P, P^1 என்ற இருவேறுபட்ட புள்ளிகளில், உள்ளே, ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்க முடியாது.

குறிப்பு : திசைக் கோட்டு, அடிப்படையில், இங்கு $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{p}{q}$ என்ற கூட்டு விகிதமாகும்.

18 (b) வெளிப்பிரிவு: $\frac{p}{q} = \frac{AP}{PB} = \frac{AP^1}{P^1B}$

$$\therefore \frac{AP}{PB} - 1 = \frac{AP^1}{P^1B} - 1$$

அதாவது $\frac{AB}{PB} = \frac{AB}{P^1B}$

$\therefore$ $PB = P^1B$ என நிறுவப்படுகிறது. எனவே, P, P^1 இரண்டும் வெவ்வேறு புள்ளிகள் அல்ல, ஒன்றே என நிறுவப்படுகிறது. எனவே ABஐ, P, P^1 என இரு வேறுபட்ட புள்ளிகளில் வெளியே, ஒரே விகிதத்தில், பிரிக்க முடியாது.

குறிப்பு : முன்னுரையில், பல்–விகிதப் பிரிவுகள் என்ற பகுதியில் கூறப்பட்டதை, இந்தக் கட்டத்தில் நாம் சற்று நோக்குவோம்.

18 (b) என்ற படத்தில், AB என்ற நேர்க்கோடு, Pல், வெளியே $\frac{p}{q}$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது.

திசைக் கோட்டு அடிப்படையில், $\frac{\overline{AP}}{PB}$ = கழிவு விகிதம்.

$\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{p}{q}$ என்ற குறையெண் மதிப்புப் பெறும். தேற்றத் தெரிப்பில் இக் குறியீட்டை நாம் பயன்படுத்தவில்லை. ஏனெனில் $\frac{AP}{PB}$ன் தனி எண் மதிப்பாகிய (absolute value) $\frac{p}{q}$ என்பதே, போதுமாயிருந்தது.

1·1 இசை வரிசைப் பிரிவு (Harmonic division): வரையறை:

AB என்ற நேர்க்கோட்டை, உள்ளும், வெளியும், முறையே, P, Q என்ற புள்ளிகளில் ஒரே விகிதத்தில் பிரித்தால், அதாவது $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ என அமையும்படிப் பிரித்தால், AB என்ற நீளம், PQ என்ற புள்ளிகளில் இசை வரிசையில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கூறப்படும்.

இவ் வரையறையை யொட்டி, சில கிளைத் தேற்றங்கள் பெறப்படும். அவை பின்வருவன:

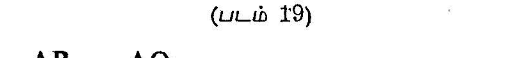
1·1·1 AB என்ற நீளம், P, Qல் இசை வரிசையில் பிரிக்கப்பட்டால், PQ என்ற நீளம் A, Bல் இசை வரிசையில் பிரிக்கப்படும்.

1·1·2 ABன் மையம் O ஆனால் (i) $OP \cdot OQ = OA^2 = OB^2$

(ii) $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AB}$

இவைகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக நிறுவுவோம்.

1·1·1. தெரிப்பு.



(படம் 19)

சி. வி: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ (கொடுக்கப்பட்டது)

தெ: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ ஆகையால், $\frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QB}$

அதாவது $\frac{PB}{BQ} = \frac{PA}{AQ}$ என நிறுவப்படுகிறது.

எனவே PQன் நீளம், A, B என்ற புள்ளிகளில் இசை வரிசையில் பிரிக்கப்படுகிறது.

(1·1·2)

(i) சி. வி: O என்பது ABன் மையம் (படம். 19)

அதாவது AO = OB

தெரிப்பு: $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore\ \frac{AP+PB}{AP-PB}=\frac{AQ+QB}{AQ-QB}$

$\therefore\ \frac{AB}{(AO+OP)-(OB-OP)}=\frac{(AO+OQ)+(OQ-OB)}{(AO+OQ)-(OQ-OB)}$

$\therefore\ \frac{AB}{2OP}=\frac{2OQ}{2OA}$ ($\because$ AO = OB)

$\therefore\ \frac{2OA}{2OP}=\frac{2OQ}{2OA}$

$\therefore$ OP. OQ = $OA^2 = OB^2$ (நி. பட்டது)

(1·1·2)

(ii) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$ (கொடுக்கப்பட்டது.)

$\therefore\ \frac{AP}{AB-AP}=\frac{AQ}{AQ-AB}$

$\therefore\ \frac{AB-AP}{AP}=\frac{AQ-AB}{AQ}$

$\therefore\ \frac{AB}{AP}-1=1-\frac{AB}{AQ}$

$\therefore\ \frac{AB}{AP}+\frac{AB}{AQ}=2$

$\therefore\ \frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AB}$

குறிப்பு: இசைத்* தொடரில், a, b, c இருக்குமானல், $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ என இயற் கணிதத்தில் நாம் அறிவோம். ஆகவே AP, AB, AQ என்பவை இசைத் தொடரிலுள்ளன என்பது புலனாகிறது. இதையொட்டித்தான் இசை வரிசைப் பிரிவு என வரையறுக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 1

1. 15 செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு நேர்க்கோடு, உள்ளும் வெளியும் 3 : 2 என்ற விகிதத்தில், முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. பகுதிகளின் நீளங்கள் என்ன? (AP = 9; PB = 6; AQ = 45; QB = 30 செ.மீ.)

2. a செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்க்கோடு, உள்ளும் வெளியும் $p : q$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. பகுதிகளின் நீளங்கள் யாவை?

$$\left[\frac{ap}{p+q};\quad \frac{aq}{p+q};\quad \frac{ap}{p-q};\quad \frac{aq}{p-q}.\right]$$

3. AB என்ற நேர்க்கோடு, P, Q என்ற புள்ளிகளில் இசை வரிசையில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. PQன் மையம் O. $\frac{OA}{OB} = \frac{AP^2}{PB^2}$ என நிறுவுக.

4. மேற்கூறிய கணக்கில் பிரிவு விகிதம் $\frac{m}{n}$ ஆனல்,

$\frac{OP}{OQ} = \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2$ என் நிறுவுக.

[குறிப்பு: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = \frac{m}{n}$

$$\therefore \frac{AP+PB}{AP-PB} = \frac{AQ+QB}{AQ-QB} = \frac{m+n}{m-n}$$

$$\therefore \frac{AB}{2OP} = \frac{2OQ}{AB} = \frac{m+n}{m-n}$$

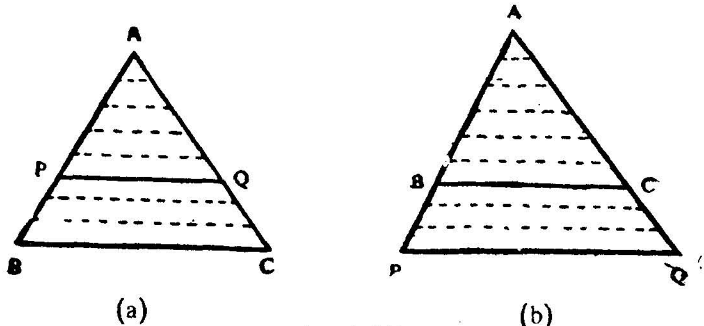
தலைகீழாக்கிப் பெருக்கினல் $\frac{OP}{OQ} = \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2$ எனப் பெறப்படும்.]

5. கிளைத் தேற்றமாகிய $OP.\ OQ = OA^2 = OB^2$ என்பதன் மறுதலைத் தேற்றத்தை யெழுதி, அதை நிறுவுக.

6. AB, CD ஒரு வட்டத்தின் விட்டங்கள். அவை முறையே P, Q ; R, S என்ற இடங்களில் உள்ளும் வெளியும் இசை விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன (பிரிவினை, ஒரே விகிதம் அல்லது வெவ்வேறு விகிதங்கள் – எப்படியும் இருக்கலாம்). P, Q, R, S ஒரு வட்ட வரை மேற் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தேற்றம் 2

ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதாமொரு பக்கத்திற்கு வரையப்படும் இணைக்கோடு, மற்றிரு பக்கங்களை, (உள்ளேயோ, வெளியேயோ) விகித சமத்தில் வெட்டும்.



(படம் 20)

சி. வி : $\triangle$ ABCல், PQ ‖ BC ஆக வரையப்பட்டிருக்கிறது.

20 (a) படத்தில், AB, ACஐ PQ உள்ளே வெட்டுகிறது.

20 (b) படத்தில், AB, ACன் நீட்டல்களை PQ வெட்டுகிறது.

நி. வே : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ என நிறுவவேண்டும்.

தெ : $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு, p, q முழு எண்கள். APஐ ஒவ்வொன்றும் x அளவுள்ள p சமபாகங்களாகப் பிரிப்போம். $\left(x = \frac{AP}{p}\right)$ அப்போது அதே x – அளவுள்ள q சமபாகங்களாக, PQஐப் பிரிக்க முடியும்.

அப்படிப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் வழியாக, BCக்கு இணைக்கோடுகள், AQ, QC இரண்டையும் முறையே p, q சமபாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. ஒவ்வொரு பகுதியும் y நீளமுடையதெனக் கொள்வோம்.

ஆகவே, $\frac{AQ}{QB} = \frac{py}{qy} = \frac{p}{q}$

ஆனல் $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q}$

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ என நிறுவப்பட்டது.

(இத் தெரிப்பு இரண்டு படங்களுக்கும் பொருத்தமானது.)

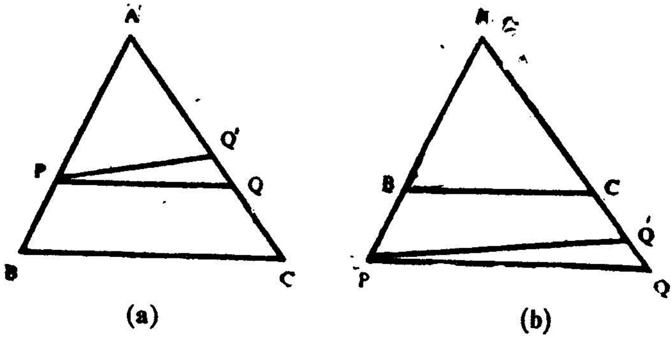
கிளைத் தேற்றம்: PQ ∥ BC ஆனால்,

(1) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$ அல்லது $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}$;

(2) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$ அல்லது $\frac{AB}{PB}=\frac{AC}{QC}$.

மறுதலைத்தேற்றம் 2(*a*)

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களை (உள்ளேயோ, வெளியேயோ) விகித சமத்தில் வெட்டும்படி ஒரு நேர்க் கோடு வரைந்தால், அந்நேர்க்கோடு, மூன்றும் பக்கத்திற்கு இணைக்கோடாகும்.



(படம் 21)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம். PQ என்ற நேர்க்கோடு, AB, AC என்ற பக்கங்களை, [21(*a*) – உள்ளே; 21 (*b*) வெளியே] ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

அதாவது $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$

நி. வே: PQ ∥ BC என நிறுவவேண்டும்.

தெ: PQ, BCக்கு இணைக்கோடில்லையானால், PQ' என P வழியாக, BCக்கு ஒரு இணைக்கோடு வரைக.

தேற்றம் 2ன்படி, $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ'}{Q'C}$

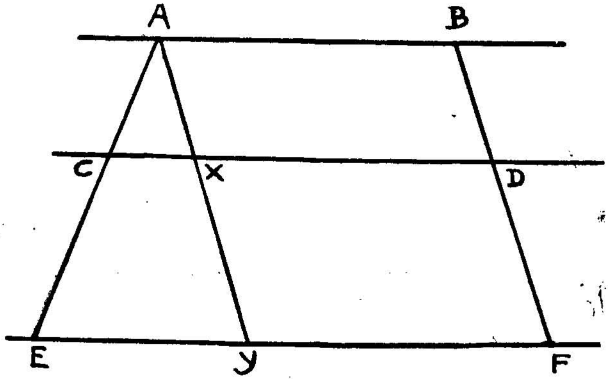
ஆனால் $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore \frac{AQ}{QC}=\frac{AQ'}{Q'C}$ எனப் பெறப்படுகிறது.

அதாவது AB என்ற கோடு, Q, Q^1 என இரு புள்ளிகளில் விகித சமத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. தேற்றம் 1ன் படி இது இயலாது. எனவே, Q,Q^1 என்பவை ஒன்றுகின்றன; அவைகள் வெவ்வேறு புள்ளிகள் அல்ல. எனவே PQ ∥ BC என நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 2

1. மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இணைக்கோடுகளை இரு குறுக்குக் கோடுகள் வெட்டுமானல், அவ்விணைக் கோடுகள் விகித சமத்தில் பிரிக்கப்படுகின்றனவென நிறுவுக.



(படம் 22)

குறிப்பு: AXY ∥ BDFக்கு வரைக. அப்போது AX = BD: XY = DF.

$$\therefore \ \frac{AC}{CE} = \frac{AX}{XY} = \frac{BD}{DF}$$

2. ஒரு முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்களின் மையங்களை யிணைக்கும் கோடு, மூன்றும் பக்கத்திற்கு இணைக்கோடென நிறுவுக.

3. ஒரு சரிவகத்தின் (Trapezium) மூலைவரைகள் விகித சமத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றனவென நிறுவுக. (முதல் கணக்கைப் பயன்படுத்துக.)

4. ABC ஒரு முக்கோணம். ∠Bன் சம வெட்டியின்மேல் AD என்ற குத்துக்கோடு வரையப்படுகிறது. D வழியாக, BCக்கு வரையப்படும் இணைக்கோடு, ACஐ இரு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறதென நிறுவுக.

5. ஒரு நாற்கரத்தில் அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் மையங்களை யிணைக்கும் கோடுகள் ஓர் இணைக்கரம் அமைக்கின்றன வென நிறுவுக. அவ்விணைக்கரத்தின் பக்கங்களுக்கும், நாற்கரத்தின் மூலை வரைகளுக்கும் என்ன தொடர்பு ?

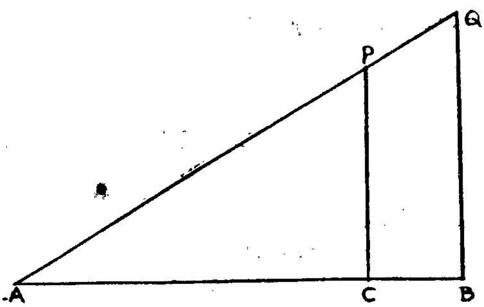
6. △ ABCல், AD ஒரு மையக்கோடு. ADல் O ஒரு புள்ளி. BOம், COம், எதிர்ப்பக்கங்களை முறையே P, Qல் சந்திக்கின்றன. PQ ∥ BC என நிறுவுக.

7. இரு வட்டங்கள் தொடும் இடம் A. A வழியாக ஏதாமிரு நேர்க்கோடுகள் வட்டங்களை, P, Q; R,Sல் சந்திக்கின்றன. $\frac{PA}{AQ} = \frac{RA}{AS}$ என நிறுவுக.

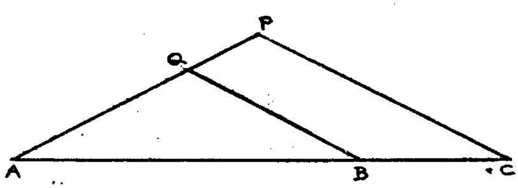
8. △ ABCல், ∠B, ∠Cன் சமவெட்டிகளின் மேல், AD, AE என்ற குத்துக் கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. DE ∥ BC என நிறுவுக.

செய்முறை 1
(Construction)

ஒரு குறிப்பிட்ட நீளமுள்ள நேர்க்கோட்டை, உள்ளும், வெளியும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்க.



(a)



(b)

(படம் 23)

உட்பிரிவு: படம் 23 (a)

சி. வி : AB என்ற நேர்க்கோடு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

செய்ய வேண்டுவது : AB என்ற நீளத்தை, A, Bக்கு, $m : n$ என்ற ஒரு கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்க வேண்டும்.

செய்முறை : ABக்கு ஏதாமொரு கோணம் கொண்ட ஒரு கோடு AQ என வரைக.

ஏதாமொரு வசதியான அலகு கொண்டு $AP = m$ அலகுகள், $PQ = n$ அலகுகள் நீளம் பெற்ற P, Q என்ற புள்ளிகளை இடங்குறிக்க.

B, Q இணைக்க.

P வழியாக BQக்கு ஒரு இணைக்கோடு வரைக.

அக்கோடு ABஐ Cல் சந்திக்கட்டும்.

இப்போது AB என்ற நீளம் C என்ற புள்ளியில் $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது ;

அதாவது $AC : CB = m : n$ (உட்பிரிவு)

தெரிப்பு : $\triangle$ ABQல், CP ∥ BQ (செய்முறை)

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{AP}{PQ} = \frac{m}{n}$$ என நிறுவப்பட்டது.

வெளிப்பிரிவு : படம் 23 (b)

சி. வி : AB என்ற நேர்க்கோடு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

செ. வே : ABன் நீட்டலில் $AC : CB = m : n$ என்ற விகிதசமத்திற்கொப்ப C என்ற ஒரு புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும், அல்லது இடங்குறிக்க வேண்டும்.

செ. மு : ABக்கு ஏதாமொரு கோணம் கொண்ட AP என்ற ஒரு கோடு வரைக.

ஏதாமொரு வசதியான அலகுகொண்டு, $AP = m$ அலகுகள் பெற்ற புள்ளி Pஐ இடங்குறிக்க.

Pலிருந்து Aஐ நோக்கி $PQ = n$ அலகுகள் பெற்ற புள்ளி Qஐ இடங் குறிக்க. B, Qஐ இணைக்க.

P வழியாக, BQக்கு ஒரு இணைக்கோடு வரைக.

அக்கோடு ABன் நீட்டலை Cல் சந்திக்கட்டும்.

இப்போது AB என்ற நீளம், C என்ற புள்ளியில் $m : n$ விகிதத்தில் வெளியே பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது.

அதாவது $AC : CB = m : n$ (வெளிப் பிரிவு)

தெரிப்பு : △ APCல், BQ ∥ CP (செய் முறை)

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{AP}{PQ} = \frac{m}{n}$$

முக்கிய குறிப்பு : திசைக்கோட்டு அடிப்படையில் தகுந்த குறியீடுகள் இட்டும் புரிந்து கொள்க.

செய்முறை 2

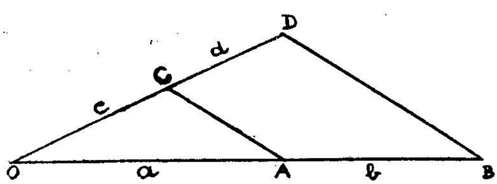
a, *b*, *c*, எனக் கொடுக்கப்பட்ட மூன்று அளவுகளின் நான்காம் பொருத்தக் கூறு (Fourth Proportional) காண்க.



(படம் 24)

சி. வி: *a*, *b*, *c* என்பவை கொடுக்கப்பட்ட மூன்று நீளங்கள்.

செ. வே: $a : b = c : d$ என்ற விகித சமத்திற்கொப்ப, *d* என்ற நீளம் காண வேண்டும்.



(படம் 25)

செ. மு: OAB என்ற நேர்க்கோட்டில் $OA = a$, $AB = b$ என்ற அளவில் A, B என்ற புள்ளிகளை இடங்குறிக்க. OABக்கு ஏதாமொரு கோணத்தில் OD என்ற கோடு வரைந்து, அதில் $OC = c$ என்ற அளவில் C என்ற புள்ளியை இடங் குறிக்க.

CA என்ற புள்ளிகளை இணைத்து, B வழியாக, CAக்கு ஓர் இணைக்கோடு வரைக.

அவ்விணைக்கோடு OCன் நீட்டலை Dல் வெட்டட்டும். அப்போது நமக்கு வேண்டிய *d* என்ற நான்காம் பொருத்தக் கூறின் நீளம் CD ஆகும்.

தெ: $\triangle$ OBDல், AC ∥ BD (செய்முறை)

$$\therefore \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

அதாவது $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ என நிறுவப்படுகிறது.

செய்முறை 3

இரு அளவுகள் a, b என்பவைக்கு மூன்றும் பொருத்தக் கூறு காண்க.

இது, செய்முறை 2ன் படி a, b, b, ஆகியவற்றின் நான்காம் பொருத்தக் கூறு காண்பதேயாம்.

செய்முறைப் பயிற்சி (A)

1. 8 செ. மீ. அளவுள்ள ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து, அதை உள்ளும் வெளியும் 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரித்து, அவைகளை அளந்து சரிபார்க்க.

2. 7·7 செ. மீ. அளவுள்ள ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து அதை வெளியே 3:4 என்ற விகிதத்தில் பிரித்து, அளந்து சரி பார்க்க.

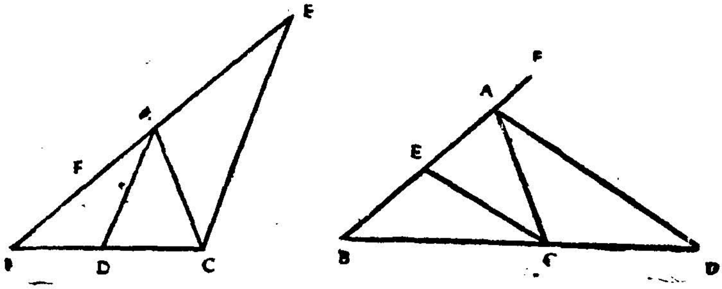
3. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 18·9 செ. மீ. அதன் பக்கங்கள் 2 : 3 : 4 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. வடிவ கணித செய்முறைப்படி, அம் முக்கோணம் வரைக.

4. செய்முறைப்படி, 4, 5, 6 மீட்டர்களுக்கு நான்காம் பொருத்தக் கூறு கண்டு, அதை அளந்து சரிபார்க்க (அளவுச் சட்டம் 1 மீ = 1 செ. மீ. எனக் கொள்க.)

5. செய்முறைப்படி 5 மீ, 7·2 மீ என்ற நீளங்களுக்கு மூன்றும் பொருத்தக்கூறு காண்க.

தேற்றம் 3

ஒரு முக்கோணத்தில், ஒரு கோணத்தை (உள்ளே/வெளியே) இரு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் நேர்க்கோடு, அக்கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கத்தை (உள்ளே/வெளியே) மற்றிரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.



(a) (b)

(படம் 26)

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம்
∠Aன் சம வெட்டி AD. [26 (*a*)ல் உள்-சம வெட்டி ; 26 (*b*)ல் வெளி சம வெட்டி].
AD, எதிர்ப்பக்கம் BC ஐ D என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது.

நி. வே : $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ என நிறுவ வேண்டும்.

வரைவழி : (வ. வ) : C வழியே, ADக்கு இணையாக CE வரைக.
(Construction) CE, 26 (*a*)ல் BAன் நீட்டலையும் 26 (*b*)ல் BAன் உள்ளும், Eல் சந்திக்கட்டும்.

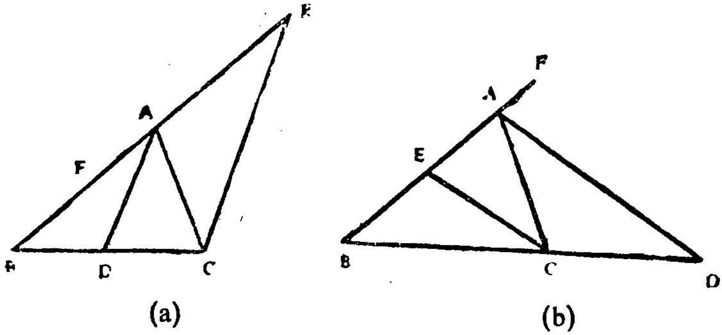
படங்களில் குறிப்பிட்டபடி, F என ஏதாமொரு புள்ளி, BAல் அல்லது BAன் நீட்டலில் எடுத்துக் கொள்க.

தெ : கொடுத்தபடி, ∠ Aன் சமவெட்டி AD
$\therefore \angle CAD = \angle DAF.$ (A)
மேலும் AD ∥ CE (வ. வ)
இவ்விணைக் கோடுகளை, AC, EF என்ற குறுக்குக் கோடுகள் வெட்டுகின்றன.
$\therefore \angle CAD = \angle ACE$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)
மேலும் $\angle DAF = \angle AEC$ (ஒத்த கோணங்கள்)
(A) காரணமாக, $\angle ACE = \angle AEC$
$\therefore AC = AE$
△ EBCல், AD ∥ CE (வ. வ) (B)
$\therefore \frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE}=\frac{BA}{AC}$ [(B)ன் படி]

என நிறுவப்பட்டது.

மறுதலைத் தேற்றம் 3 (a)

ஒரு முக்கோணத்தில் ஓர் உச்சியிலிருந்து வரையப்படும் நேர்க்கோடு, அதன் எதிர்ப் பக்கத்தை (உள்ளே/வெளியே) மற்றிரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு, அவ்வுச்சிக் கோணத்தை (உள்ளே/வெளியே) இரு சமபகுதி களாகப் பிரிக்கிறது.



(படம். 27)

சி. வி.: A யிலிருந்து வரையப்படும் AD என்ற நேர்க்கோடு, BCஐ சந்திக்கும் D என்ற புள்ளியில் $\frac{BD}{DC}$யும் $\frac{AB}{AC}$யும் சமம்.

நி. வே: AD என்ற நேர்க்கோடு $\angle$Aன் சமவெட்டி (உள்ளே/வெளியே) என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ: C வழியே, ADக்கு இணையாக CE வரைக. CE, 27 (*a*)ல் BAன் நீட்டலையும், 27 (*b*)ல் BAஐயும், Eல் சந்திக்கிறது. படத்தில் காட்டியபடி, BAல் அல்லது BAன் நீட்டலில் F என ஏதாமொரு புள்ளி கொள்க.

தெ: AD ∥ CE (வ. வ.)
AC, EF அவைகளை வெட்டுகின்றன. (A)

$\because$ $\angle$CAD = $\angle$ACE (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

மேலும் $\angle$DAF = $\angle$AEC (ஒத்த கோணங்கள்) (B)

$\triangle$EBCல், AD ∥ CE ஆகையால்,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

ஆனல் $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (சி. வி).

$\therefore$ AC = AE.

$\therefore$ $\angle ACE = \angle AEC$

$\therefore$ (A), (B)ன் காரணமாக,

$\angle CAD = \angle DAF$ [27 (*b*)]

$= \angle DAB$ [27 (*a*)]

$\therefore$ $\angle A$ஐ AD இரு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

குறிப்பு: திசைக்கோட்டு அடிப்படையில்

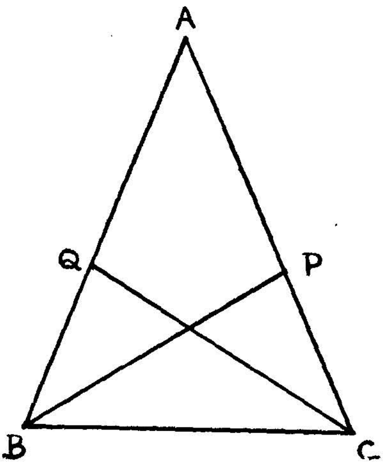
உட்பிரிவு $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{AB}{AC}$ = கூட்டெண் மதிப்பு

வெளிப்பிரிவு $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{AB}{-AC}$ = குறையெண் மதிப்பு

பயிற்சி 3

1. ABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம். அதில் $\angle B = \angle C$; அக்கோணங்களின் சமவெட்டிகள் எதிர்ப் பக்கங்களை முறையே P, Qல் சந்திக்கின்றன. PQ ∥ BC என நிறுவுக.

இதன் மறுதலை யென்ன?



(படம் 28)

தெ: $\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{AQ}{QB} = \frac{AC}{BC}$

AB = AC ஆதலால்

$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$

$\therefore$ PQ ∥ BC

2. $\triangle$ ABCல், $\angle A$ன் உள்/வெளி சமவெட்டிகள் BCஐ முறையே D, Eல் சந்திக்கின்றன. BCன் மையம் O. OD·OE $= OB^2$ என நிறுவுக.

3. முறைப்படி △ ABCன் பக்கங்கள் a, b, c. ∠Aன் உள், வெளி சமவெட்டிகள் AD, AE எதிர்பக்கத்தை D, Eல் சந்திக்கின்றன. பின் வருவனவற்றை நிறுவுக :

$$\text{BD}=\frac{ac}{b+c};\quad \text{DC}=\frac{ab}{b+c};\quad \text{BE}=\frac{ca}{b\int c};\quad \text{CE}=\frac{ab}{b\int c};$$

4. △ ABCல், ∠A, ∠Bன் உள் சம வெட்டிகள் AD, BE என்பவை Iல் சந்திக்கின்றன.

$\frac{\text{AI}}{\text{ID}}=\frac{b+c}{a}$ எனவும், $\frac{\text{BI}}{\text{IE}}=\frac{c+a}{b}$ எனவும் நிறுவுக.

5. ஒரு முக்கோணத்தில்

(1) கோணங்களின் உள் சமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். (அப்புள்ளி I, உள் தொடு வட்ட மையமாகும்) (In-centre) ;

(2) இரு கோணங்களின் வெளி சமவெட்டிகளும், மூன்றும் கோணத்தின் உள் சமவெட்டியும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். (அப்புள்ளி, வெளி தொடு வட்ட மையமாகும் – Ex-centre).

இவைகளை நிறுவுக.

6. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம்; C வட்டவரையின் மேல் ஒரு புள்ளி. Cல் வரையப்படும் தொடுவரை Aல் வரையப்படும் தொடுவரையை Dல் சந்திக்கிறது. Cலிருந்து, ABக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோட்டை BD இரு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.

7. ABCD ஒரு நாற்கரம். ∠A, ∠Cன் சமவெட்டிகள் BDன் மேல் சந்திக்கின்றன. அப்போது, ∠B, ∠Dன் சம வெட்டிகள் ACன் மேல் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

8. இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று O என்ற புள்ளியில் உள்ளே தொடுகின்றன. உள் வட்டவரையின் மேலுள்ள Pல் அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுவரை வெளிவட்டத்தை, A, Bல் சந்திக்கிறது. $\frac{\text{OA}}{\text{OB}}=\frac{\text{AP}}{\text{PB}}$ என நிறுவுக. [குறிப்பு : Oல் இருவட்டங்களுக்கும் பொதுத் தொடுவரை வரைக. அது ABஐ Cல் சந்திக்கட்டும்].

9. ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம். AC, BD இரண்டும் Eல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. AB = BC ஆனால், $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC}$ என நிறுவுக.

10. $\triangle ABC$ல், $\angle A$ன் உள் சமவெட்டி BCஐ Dல் சந்திக்கிறது. ACக்கு இணைக்கோடான DE, ABஐ Eல் வெட்டுகிறது; அவ்வாறே, ABக்கு இணைக்கோடான DF, ACஐ Fல் வெட்டுகிறது.

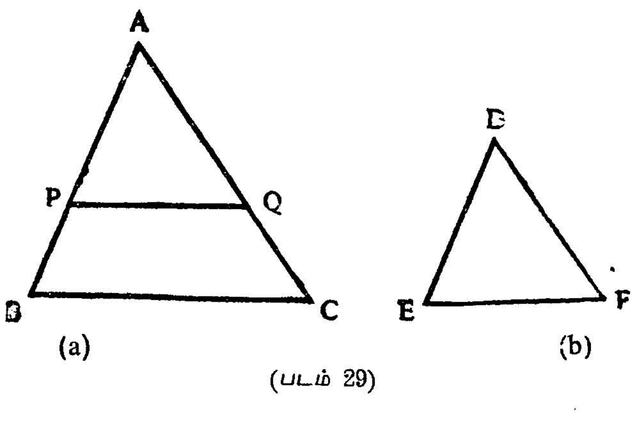
$BE : CF = AB^2 : AC^2$ என நிறுவுக.

2. வடிவொத்த முக்கோணங்களும்- பல் கோணங்களும்

(Similar triangles and Polygons):

தேற்றம் 4

இரு சமகோண முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமத்திலுள்ளன.



(படம் 29)

சி. வி : $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ இரு சமகோண முக்கோணங்கள்.

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$

நி. வே : $\frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$ என நிறுவவேண்டும்.

வ. வ: ABல் AP = DE என்ற அளவில் P புள்ளியையும் ACல் AQ = DF என்ற அளவில் Q புள்ளியையும் எடுத்துக்கொண்டு, P, Qஐ இணைக்கவும்.

தெ: △ APQ, △ DEFல்,

$$\left.\begin{array}{l} AP = DE \\ AQ = DF \end{array}\right\} (\text{வ - வ})$$

$\angle A = \angle D$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore$ $\triangle APQ \equiv \triangle DEF$ [இருபக்க-இடைக் கோணத் தேற்றம்]

$\therefore$ $\angle P = \angle E = \angle B$ (சி. வி)
$\angle Q = \angle F = \angle C$ (சி. வி.)

$\therefore$ $PQ \parallel BC$

$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

ஆனல் வ. வ. படி, $AP = DE$
$AQ = DF$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

அவ்வாறே, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE} \quad (\text{நி. பட்டது.})$$

குறிப்பு: வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

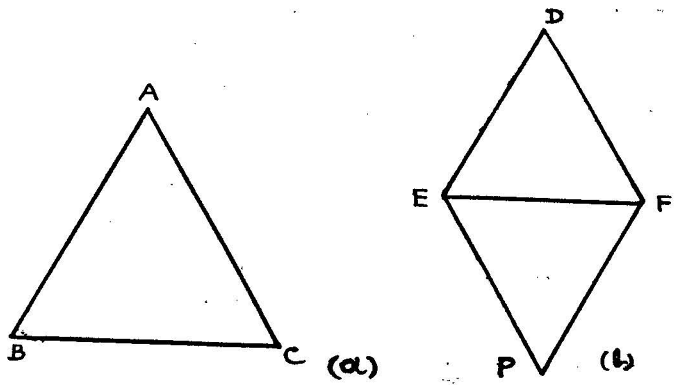
1. இரு சமகோண முக்கோணங்கள் வடிவொத்தன. (Equiangular triangles)

2. இதையே, இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் வடிவொத்தன வென்றும் கூறலாம். (Equilateral triangles)

3. இரு முக்கோணங்களில், ஒன்றின் இரு கோணங்கள் தனித்தனியே மற்றதன் இரு கோணங்களுக்குச் சமமாக விருப்பின், அவை வடிவொத்தன.

மறுதலைத்தேற்றம் 4 (*a*)

விகித சமமுடைய பக்கங்களையுடைய இரு முக்கோணங்களில் ஒத்த கோணங்கள் சமமானவை.



(படம் 30)

சி. வி : $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ல்

$\frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$ ஆக இருக்கின்றன (A)

நி. வே : $\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$ என நிறுவவேண்டும்.

வ. வ : படத்திலுள்ளபடி, EFக்குக் கீழ்ப்புறத்தில் $\angle FEP = \angle B$ ஆகவும்

$\angle EFP = \angle C$ ஆகவும் EP, FP என இருகோடுகள் வரைக.

EPம், FPம், P என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

தெ : $\triangle ABC$, $\triangle PEF$ல்,

$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle FEP;\\ \angle C = \angle EFP;\end{array}\right\}$ வ. வ.

$\therefore \angle A = \angle EPF$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ம் $\triangle PEF$ம் சமகோண முக்கோணங்கள்.

$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FP} = \frac{AB}{PE} \qquad (B)$$

(A), (B), ஐ ஒப்பிட, FD = FP
DE = PE எனப் பெறப்படும்.

$\therefore \triangle DEF \equiv \triangle PEF$

எனவே, $\triangle$ DEF, $\triangle$PEF இரண்டிலும் ஒத்த கோணங்கள் சமமானவையும் கூட.

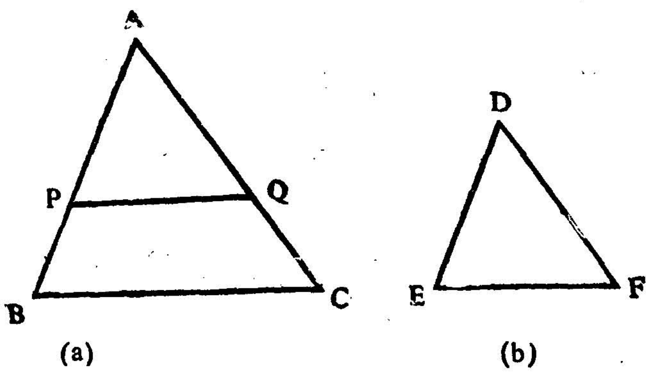
ஆனால் வனை வழிப்படி,

$\triangle$ ABC, $\triangle$ PEF இரண்டிலும், ஒத்த கோணங்கள் சமமானவை.

$\therefore$ $\triangle$ABC, $\triangle$DEF இரண்டிலும் ஒத்த கோணங்கள் சமமாயிருக்கின்றனவென நிறுவப்பட்டது.

தேற்றம் 5

இரு முக்கோணங்களில், ஒவ்வோர் கோணங்கள் சமமாகி அவைகளை யொட்டிய பக்கங்கள் சம விகிதமாயின், அவ்விரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தன.



(படம் 81)

சி. வி : $\triangle$ கள் ABC, DEFல்
$\angle A = \angle D$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

நி. வே : இவ்விரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தன,

அதாவது, $\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$ என நிறுவவேண்டும்.

வ. வ : ABல், AP = DE என்ற அளவில் P என்ற புள்ளியையும், ACல், AQ = DF என்ற அளவில் Q என்ற புள்ளியையும் எடுத்து, P, Qஐ இணைக்கவும்.

தெ : $\triangle$ கள் ABC, APQல்,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad (\text{சி. வி})$$

$$= \frac{AP}{AQ} \quad (\text{வ. வ. படி})$$

$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

$\therefore$ PQ $\parallel$ BC

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \angle B = \angle P \\ \angle C = \angle Q \end{array}\right\} (1)$$

ஆனல் $\triangle$ கள் APQ, DEFல்,

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ AP = DE \\ AQ = DF \\ \therefore \triangle APQ \cong \triangle DEF \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2) \\ (\text{இருபக்க – இடைக் கோணத் தேற்றம்}) \end{array}$$

(1) ம் (2) ம் கொண்டு,

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$

எனவே, $\triangle$ கள் ABCம், DEFம் வடிவொத்தன.

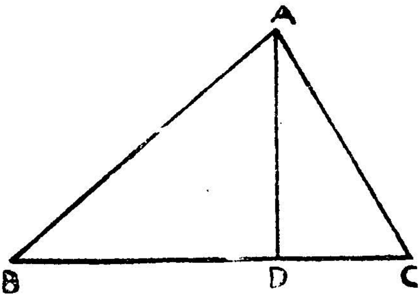
(நி. பட்டது)

தேற்றம் 6

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில், செங்கோண உச்சியிலிருந்து, அதன் எதிரேயுள்ள செம்பக்கத்திற்கு ஒரு குத்துக் கோடு வரைந்தால்,

(1) கிடைக்கும் இரு செங்கோண முக்கோணங்களும் முழு செங்கோண முக்கோணத்தோடு வடிவொத்தன ;

(2) கிடைக்கப்பெற்ற இரு செங்கோண முக்கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தன.



(படம் 32)

சி. வி : ABC ஒரு செங்கோண △.
∠A = 90°
BCன்மேல் AD குத்துக்கோடு.

தெ : (1) △கள் ABD, CBAல்
∠B பொது
∠D = ∠A (= 90°)

∴ ∠BAD = ∠BCA

∴ △ABD ||| △CBA (அல்லது △ABC) என நிறுவப்பட்டது.

மேலும் △கள் ADC, BACல்,
∠C பொது
∠D = ∠A (= 90°)

∴ ∠CAD = ∠CBA

∴ △ADC ||| △BAC (அல்லது △ABC) என நிறுவப்பட்டது.

(2) $\triangle$கள் ABD, CADல்,

$\angle ADB = \angle CDA\ (=90^\circ)$

$\angle ABD = \angle CAD$

$\angle BAD = \angle ACD$

$\therefore\ \triangle ABD\ |||\ \triangle CAD$ என நிறுவப்பட்டது.

கி. தே (1) $\because\ \triangle ABD\ |||\ \triangle CBA$

$$\frac{AB}{CB}=\frac{BD}{BA}$$

$\therefore\ CB\cdot BD = AB^2$

அதாவது, $BD\cdot BC = BA^2$

அதுபோலவே, $\because\ \triangle ADC\ |||\ \triangle BAC$,

$$\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{AC}$$

$\therefore\ BC\cdot DC = AC^2$

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து,

"செங்கோணம் தாங்கும் ஒவ்வொரு பக்கமும், அடுத்துள்ள செம்பக்கப் பகுதிக்கும், செம்பக்கத்திற்கும், விகிதச் சம இடையுறுப்பாகும்."

கி. தே. (2) $\because\ \triangle ABD\ |||\ \triangle CAD$,

$$\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{AD}$$

$\therefore\ CD\cdot BD = AD^2$

அதாவது $BD\cdot DC = AD^2$

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து,

"செங்கோண உச்சியிலிருந்து, செம்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு, செம்பக்கப் பகுதிகளின் விகிதச்சம இடையுறுப்பாகும்."

குறிப்பு: கிளைத்தேற்றம் (1) லிருந்து,

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2 &= BD\cdot BC+BC\cdot DC \\ &= BC(BD+DC) \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

என்ற பித்தகோரஸின் புகழ்பெற்ற தேற்றம் கிடைக்கிறது.

பயிற்சி 4

ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம். A என்ற செங்கோண உச்சியிலிருந்து BCக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு, BCஐ Dல் சந்திக்கிறது. BC·AD = AB·ACஎன நிறுவுக.

2. மேல் கணக்கில், A என்ற கோணத்தின் சமவெட்டி, BCஐ Eல் சந்திக்கிறது. BE : EC = $BD^2 : DC^2$ என நிறுவுக.

3. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் AB. வட்டத்தின்மேல் C ஏதாமொரு புள்ளி. AB என்ற விட்டத்தின் மேலுள்ள P என்ற ஏதாமொரு புள்ளியிலிருந்து, ABக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடு, CA, CB, வட்டவரை ஆகிய மூன்றையும் முறையே, D, E, F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

$PF^2 = PD \cdot PE$ என நிறுவுக.

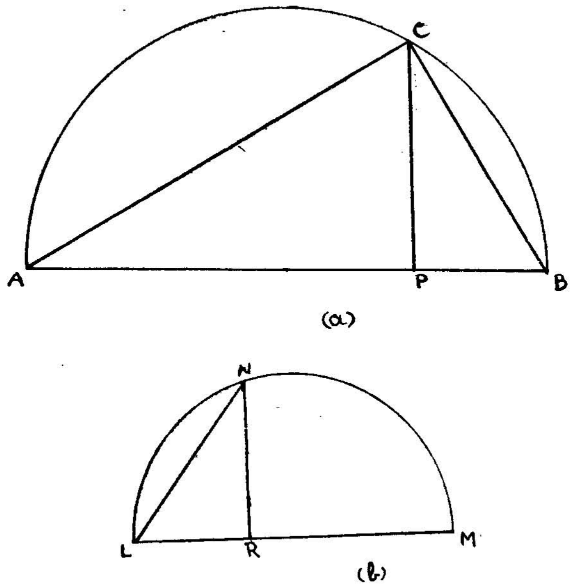
4. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளியே தொடுகின்றன. அவைகளுக்குப் பொதுவான தொடுவரையின் நீளம், அவ்வட்டங்களின் விட்டங்களுக்கிடையான பெருக்கிடையென நிறுவுக.

5. தேற்றம் படம் (32)ல் $\frac{1}{AB_2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}$ என நிறுவுக.

செய்முறை 4

a, *b* என்ற இரண்டு அளவைகளின் விகிதச் சம இடையை (Mean Proportional)க் காண்க.

$a : b = c : b$ ஆனல், c என்பது a, b இரண்டிற்கும் பொருத்த இடைக்கூறு (பெருக்கிடை – Geometric mean) எனப்படும்.



(படம் 33)

சி. வி: a, b என்பவை கொடுக்கப்பட்ட இரு அளவைகள்.
செ.வே: $ab=c^2$ என்ற சமன்பாட்டுக் கொப்ப c காண வேண்டும்.

செ. முறை [படம் 33 (a)]

(1) AB என்ற நேர்க்கோடு வரைந்து, AP = a அளவும் PB = b அளவும் கொண்டு, P, Bஐ இடங்குறிக்க.

ABஐ விட்டமாகக் கொண்டு ஓர் அரை வட்டம் வரைக.

P வழியாக, ABக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடு, அரை வட்டத்தை Cல் சந்திக்கட்டும். PC தான் நாம் வேண்டும் விகிதச் சம இடையாகும்.

தெ. △ ACB ஒரு செங்கோண முக்கோணம்
C அதன் செங்கோண உச்சி
CP ⊥ AB (செய்முறைப்படி)

∴ $CP^2 = AP \cdot PB$ (தேற்றம்)

அதாவது $\frac{AP}{CP}=\frac{CP}{PB}$

CP = c எனக் கொண்டால்

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$$

அதாவது $c^2=ab$ என நிறுவப்பட்டது.

மற்றோர் முறை: [படம் 33 (b)]

செ. மு: $a>b$ ஆனால், $LM=a$ என ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து, அதில் $LR=b$ என Rஐ இடங் குறித்துக் கொள்க.

LM என்ற விட்டம் கொண்ட ஓர் அரை வட்டம் வரைக.

R வழியாக, LMக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடு அரை வட்டத்தை Nல் சந்திக்கட்டும்.

LNதான் நாம் வேண்டும் விகிதச் சம இடையாகும்.

தெ: LNM ஒரு செங்கோண முக்கோணம்

N அதன் செங்கோண உச்சி

$NR \perp LM$ (செய் முறைப்படி)

$LN^2=LM \cdot LR$ (தேற்றம்)

அதாவது, $\frac{LM}{LN}=\frac{LN}{LR}$

LN = c எனக் கொண்டால்

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$$

அதாவது $c^2=ab$ என நிறுவப்பட்டது.

செய்முறைப் பயிற்சி B

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ ன் தோராய மதிப்புக்களை, செய்முறையில் கண்டறிக.

2. 6 செ.மீ, 4 செ.மீ, பக்கங்களுள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்புக்குச் சமமான ஒரு சம சதுரம் வரைக.

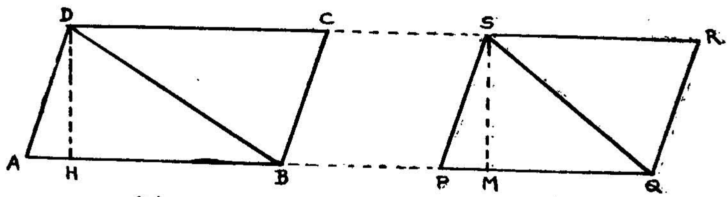
3. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்புக்குச் சமமான ஒரு சம சதுரம் வரைக.

4. 5 செ.மீ. பக்கமுடைய ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தின் பரப்புக்குச் சமமான ஒரு சம சதுரம் வரைக.

5. A, B என்ற இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் வழியாகச் சென்று PQ என்ற ஓர் குறிப்பிட்ட நேர்க்கோட்டைத் தொடக்கூடிய, ஒரு வட்டம் வரையும் முறை காண்க. அவ்விதமாக எத்தனை வட்டங்கள் வரையலாம் ?

தேற்றம் 7

ஒரே அல்லது சம உயரமுள்ள முக்கோணங்களின் பரப்புக்கள் [அதேபோல் இணைக்கரங்களின் பரப்புக்கள்] அவைகளின் அடிப்பக்கத்தின் விகிதத்திலிருக்கும்.



(அ) (ஆ)

(படம் 34)

சி. வி: △ ABD, △ PQS இரண்டும் சம உயரமுடையன. அவைகளின் அடிப்பக்கங்கள் AB, PQ.

அவ்வாறே, ▭ கரம் ABCD, ▭ கரம் PQRS இரண்டும் சம உயரமுடையன.

அவைகளின் அடிப்பக்கங்கள் AB, PQ.

இவைகளின் உயரங்கள் DH = SM

நி. வே: $\frac{\triangle ABD}{\triangle PQS}=\frac{AB}{PQ}$ (1)

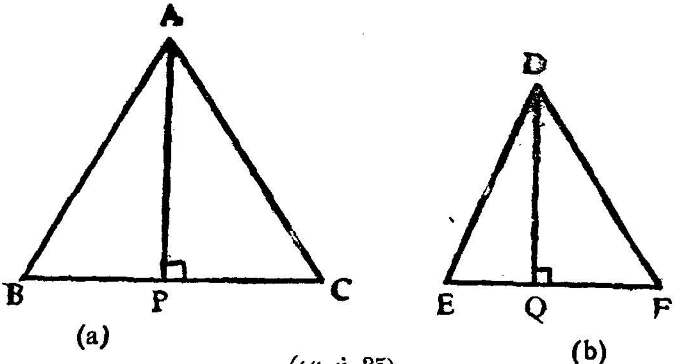
$\frac{\square \text{ கரம் } ABCD}{\square \text{ கரம் } PQRS}=\frac{AB}{PQ}$ (2)

தெ: (1) $\frac{\triangle ABD}{\triangle PQS}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot DH}{\frac{1}{2}PQ\cdot SM}=\frac{AB}{PQ}$ (நி. பட்டது)

(2) $\frac{\square \text{ கரம் } ABCD}{\square \text{ கரம் } PQRS}=\frac{AB\cdot DH}{PQ\cdot SM}=\frac{AB}{PQ}$ (நி. பட்டது)

தேற்றம் 8

வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்புக்கள் ஒத்த பக்கங்களின் இருபடி விகிதத்திலிருக்கும்.



(படம் 35)

சி. வி : △ கள் ABC, DEF வடிவொத்தவை.

நி. வே : $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{CA^2}{FD^2} = \frac{AB^2}{DE^2}$ என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ : A, D என்ற உச்சிகளிலிருந்து, எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு, முறையே, AP, DQ எனக் குத்துக்கோடுகள் வரைக.

தெ : △ கள் ABP, DEQல்

$\angle B = \angle E$ (சி. வி)

$\angle ABP = \angle DQE$ ($=90°$: வ. வ)

$\therefore \triangle ABP \,|||\, \triangle DEQ$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AP}{DQ}$

ஆனல், $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{AP}{DQ}$

இப்போது, பரப்பு $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ BC·AP

பரப்பு $\triangle$ DEF $= \frac{1}{2}$ EF·DQ

$$\therefore \frac{\text{பரப்பு } \triangle ABC}{\text{பரப்பு } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AP}{\frac{1}{2} EF \cdot DQ}$$

$$= \frac{BC^2}{EF^2} \quad \left(\because \frac{BC}{EF} = \frac{AP}{DQ}\right)$$

(நி-பட்டது.)

பயிற்சி 5

1. ABC என்ற ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செம் பக்கம் BC. BC, CA, AB என்பவற்றை அடியாகக் கொண்டு சமபக்க முக்கோணங்கள் வரையப்படுகின்றன. முதல் சம பக்க முக்கோணத்தின் பரப்பு, மற்றிரண்டு சமபக்க முக்கோ ணங்களின் கூட்டுப் பரப்புத் தொகையென நிறுவுக.

மூன்று சமபக்க முக்கோணங்களும், ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தன. அவைகளை $\triangle$ BCP, $\triangle$CAQ, $\triangle$ABR எனக் குறிப்பிடுக.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{அப்போது} & \dfrac{\text{பரப்பு } \triangle CAQ}{\text{பரப்பு } \triangle BCP} = \dfrac{CA^2}{BC^2} \\ \text{மேலும்} & \dfrac{\text{பரப்பு } \triangle ABR}{\text{பரப்பு } \triangle BCP} = \dfrac{AB^2}{BC^2}\end{array}\right\} \text{ தேற்றப்படி.}$$

$$\therefore \frac{\triangle CAQ + \triangle ABR}{\triangle BCP} = \frac{CA^2 + AB^2}{BC^2}$$

$$= \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

$$\therefore \triangle BCP = \triangle CAQ + \triangle ABR$$

2. ஒரே வட்டத்தை, தனது சுற்று வட்டமாகவும், தொடு வட்டமாகவும் கொண்ட, இரண்டு, சமபக்க அறுகோணங்கள் உள்ளன. அவைகளின் பரப்பு 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன என நிறுவுக. (செ. ப. க.)

3. இரண்டு வட்டங்கள், A, B என்ற இடங்களில் வெட்டுகின்றன. A என்ற புள்ளியில் இரு வட்டங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடுவரைகள், அவ்வட்டங்களை X, Y என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$\triangle ABX : \triangle ABY = (AB^2+BX^2) : (AB^2+BY^2)$ என நிறுவுக.

4. முன் கணக்கில் (i) $BA^2 = BX \cdot BY$ எனவும், (ii) AX, AY என்ற நீளங்கள், அவ்வட்டங்களின் விட்டங்கள் விகிதத்தில் உள்ளனவெனவும் நிறுவுக.

5. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் AB; வட்டமேலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளி C–ல் வரையப்படும் தொடுவரையின்மேல் AM, BN என்ற குத்துக்கோடுகள் வரையப்படுகின்றன.

$\triangle ABC = \triangle ACM + \triangle BCN$ என நிறுவுக. (செ.ப.க)

6. ABCD ஒரு நாற்கரம்; AC, BD என்ற மூலை வரைகள் Eல் வெட்டுகின்றன. $AC^2 = AB \cdot AD$ என்பது கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. மேலும் $\angle A$ஐ AC இரு சம பாகங்களாய்ப் பிரிக்கிறது.

$BE : ED = BC^2 : CD^2$ என நிறுவுக.

7. O என்ற மையங் கொண்ட வட்டத்திற்கு, PA, PB என்ற தொடுவரைகள் வரையப்படுகின்றன.

$\triangle APB : \triangle OAB = AP^2 : OA^2$ என நிறுவுக.

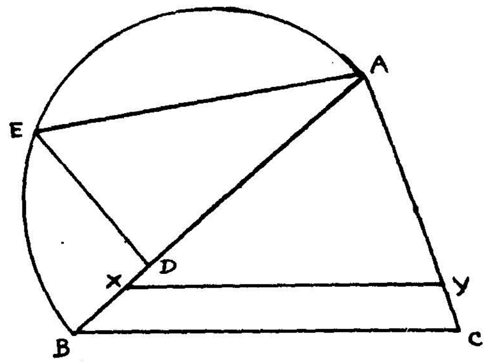
8. $BP^2 = BA \cdot BC$ என்ற சமன்பாட்டுக்கொப்ப, $\triangle ABC$ல், $\angle A$ன் சமவெட்டியின்மேல் P என ஒரு புள்ளி கொள்ளப்படுகிறது. $BA : BC = AP^2 : CP^2$ என நிறுவுக.

9. இரண்டு வட்டங்கள், A என்ற புள்ளியில் வெளியே தொட்டுக் கொள்கின்றன. B, C என்ற புள்ளிகளில் அவ்வட்டங்களைத் தொடும் தொடுவரை, மைய இணைப்புக் கோட்டை Sல் சந்திக்கிறது.

$\triangle SBA : \triangle SCA = SB : SC$ என நிறுவுக.

செய்முறை 5

ABC என்ற ஒரு முக்கோணம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. △ AXYன் பரப்பு $= \frac{p}{q}$ (△ABC) என்ற சமன்பாட்டுக்கொப்ப BCக்கு இணைக்கோடாக, XY என்ற கோடு வரையும் முறை காண்க.



(படம் 36)

சி. வி : △ ABC கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

செ.வே : △ AXY $= \frac{p}{q}$ (△ ABC) என்று அமையும் வகையில் BCக்கு இணையாக XY என்ற கோடு வரைய வேண்டும்.

செ. மு : AD $= \frac{p}{q}$ (AB) என்பதற்கொப்ப, ABன் மேல் D என்ற புள்ளியை இடங்குறிக்க.

(அதாவது ABஐ உட்பிரிவாக $p : q - p$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்க)

ABஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு அரை வட்டம் வரைந்து, D வழியாக, ABக்குக் குத்துக்கோடு வரைக. அக்கோடு அரை வட்டத்தை Eல் வெட்டட்டும்.

ABன் மேல் AEக்குச் சமமாக AX என்ற நீளங் கொள்க.

X வழியாக BCக்கு இணையாக XY வரைக.

△ AXY $= \frac{p}{q}$ (△ ABC) ஆக விருக்கும்.

தெ : $AX^2 = AE^2$ (செய்முறைப்படி)

$$= AD \cdot AB$$

$$= \frac{p}{q} AB \cdot AB$$

$$= \frac{p}{q} AB^2$$

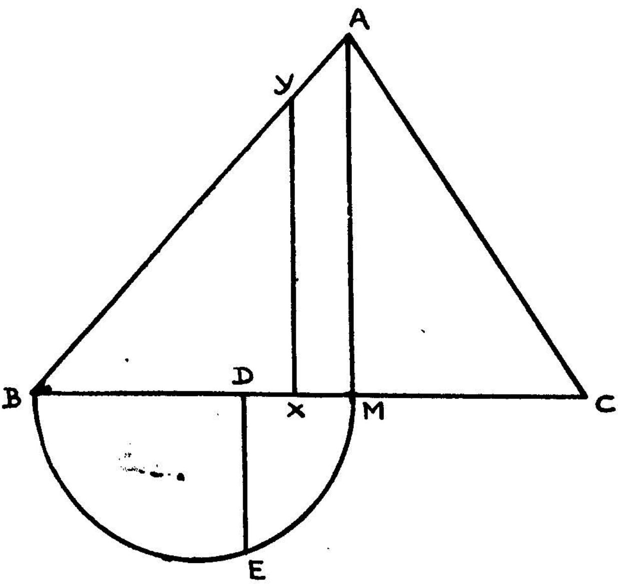
$\triangle$ AXY ||| $\triangle$ ABC என்பது கண்கூடு

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{p}{q} \qquad \text{(தேற்றம் 8)}$$

செய்முறை 6

ABC என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம்.

$\triangle$ BXYன் பரப்பு $= \frac{p}{q}(\triangle ABC)$ என்று அமையும் வகையில் BCக்கு XY என ஒரு குத்துக்கோடு வரையும் முறை காண்க.



(படம் 37)

சி. வி: $\triangle$ ABC கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

செ. வே: $\triangle AXY = \frac{p}{q} (\triangle ABC)$ என்று அமையும் வகையில் BCக்குக் குத்துக்கோடாக XY என்ற கோடு வரைய வேண்டும்.

செ. மு: AM என்ற செங்குத்துக்கோடு வரைக.

$BD = \frac{p}{q}$ என்ற அளவுப்படி, BCன்மேல் D என்ற புள்ளியை இடங்குறிக்க.

(அதாவது உட்பிரிவாக $p : q - p$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்க)

BMஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு அரை வட்டம் வரைந்து, D வழியாக BCக்கு DE என்ற குத்துக்கோடு வரைக.

அக்கோடு அரை வட்டத்தை E என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

BCன்மேல் BEக்குச் சமமாக BX என்ற நீளங் கொள்க.

X வழியாக BCக்கு XY என்ற குத்துக்கோடு வரைக. இக்கோடு ABஐ Yல் சந்திக்கட்டும்.

$\triangle$ BXYதான் நாம் வேண்டும் முக்கோணமாகும்.

தே: $\triangle BXY \,|||\, \triangle BMA$ (இது கண்கூடு)

$$\therefore \frac{\triangle BXY}{\triangle BMA} = \frac{BX^2}{BM^2} = \frac{BD \cdot BM}{BM^2} = \frac{BD}{BM}$$

[தேற்றம் 9, 7 (1)]

ஆனல், $\frac{\triangle BXY}{\triangle BCA} = \frac{\triangle BXY}{\triangle BMA} \cdot \frac{\triangle BMA}{\triangle BAC}$.

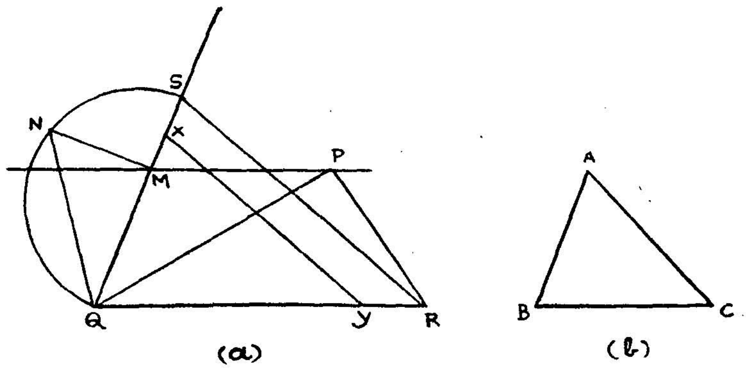
$$= \frac{BD}{BM} \cdot \frac{BM}{BC}$$

$$= \frac{BD}{BC} = \frac{p}{q}$$

$\therefore \frac{\triangle BXY}{\triangle BCA} = \frac{p}{q}$ என நிறுவப்பட்டது.

செய்முறை 7

△ABCக்கு வடிவொத்ததாகவும், △PQRன் பரப்புடையதாகவும் உள்ள முக்கோணம் வரைக.



(படம் 38)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்
PQR மற்ருேர் முக்கோணம்

செ.வே: △ ABCக்கு வடிவொத்ததாகவும், △ PQRன் பரப்பையுடையதாகவும் ஒரு முக்கோணம் வரைய வேண்டும்.

செ. மு: QRஐ அடி (Base) யாகக் கொண்டு, △ ABCக்கு வடிவொத்ததாய் △SQR வரைக.

(அதாவது ∠RQS = ∠B ; ∠QRS = ∠C)

P வழியாக QRக்கு இணைக்கோடாக PM வரைக. PMம் QSம் M-ல் சந்திக்கட்டும்.

QSஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு அரை வட்டம் வரைந்து, M வழியாக, QSக்கு MN என்ற குத்துக் கோடு வரைக. MN, அரை வட்டத்தை N-ல் சந்திக்கட்டும். QSன் மேல், QNக்குச் சமமாக QX என்ற பகுதியைக் கொள்க.

X வழியாக SRக்கு இணைக்கோடாக XY வரைக. XYம் QRம் Y-ல் சந்திக்கட்டும்.

$\triangle QXY$ என்பது நாம் வேண்டும் முக்கோணமாகும்

$\triangle QXY \mathbin{|||} \triangle ABC$ ஆகவிருக்கும். மேலும்

$\triangle QXY$ன் பரப்பும் $\triangle PQR$ன் பரப்பும் சமமாகவிருக்கும்.

தெ : $QX^2 = QN^2$

$= QM \cdot QS$ (தேற்றம் 7 (1))

மேலும் $\triangle QXY \mathbin{|||} \triangle QSR$ (கண்கூடு)

ஆனல் $\triangle QSR \mathbin{|||} \triangle BAC$ (செய்முறை)

$\therefore \triangle QXY \mathbin{|||} \triangle BAC$

மேலும் $\dfrac{\triangle QXY}{\triangle QSR} = \dfrac{QX^2}{QS^2}$ (தேற்றம் 8)

$= \dfrac{QM \cdot QS}{QS^2}$ (செய்முறை)

$= \dfrac{QM}{QS}$

$= \dfrac{\triangle QMR}{\triangle QSR}$

$= \dfrac{\triangle QPR}{\triangle QSR}$

$\therefore \triangle QXY = \triangle QPR$ (பரப்பில்)

ஆகவே $\triangle QXY \mathbin{|||} \triangle BAC$ எனவும்

பரப்பு $\triangle QXY =$ பரப்பு $\triangle QPR$ எனவும் நிறுவப்பட்டது.

செய்முறைப் பயிற்சி C

1. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 3, 5, 7 செ. மீ. கடைசிப் பக்கத்திற்கு இணைக்கோடு வரைந்து, முக்கோணத்தின் பரப்பை இரு சம கூறுகளாகப் பிரிக்க.

2. $a = 6{\cdot}2$ செ. மீ ; $b = 5$ செ. மீ ; $c = 3{\cdot}8$ செ. மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட முக்கோணம் வரைக. அதைப்போல் 2/3 பரப்புள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைக.

3. $a = 6{\cdot}5$ செ. மீ; $b = 7{\cdot}5$ செ. மீ ; $\angle B = 48^\circ$ அளவுகளுள்ள முக்கோணம் வரைக. இதன் பரப்பையுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைக.

4. 62·5 சதுர செ. மீ. பரப்புள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 5 ; 7 : 9 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. அம் முக்கோணம் வரைக.

5. $a=8$ செ. மீ, $c=9$ செ. மீ, $\angle B=60°$ அளவுகள் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பும், பக்கங்கள் 4 : 5 : 7 என்ற விகிதத்திலுமுள்ள முக்கோணம் வரைக.

6. $a=7·5$ செ. மீ, $b:c=7:4$, $\angle A=70°$ அளவுள்ள முக்கோணம் வரைக. இதன் பரப்புள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைக.

7. $AB=6·5$ செ.மீ, $AD=5$ செ. மீ, $AC=8·5$ செ. மீ அள அளவுள்ள ABCD என்ற இணைக்கரம் வரைக. AC என்ற மூலை வரைக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடுகளால் இணைக்கரத்தை மூன்று சம பரப்புள்ள பகுதிகளாகப் பிரிக்க.

வடிவொத்த பல் கோணங்கள்
(Similar Polygons):

வரையறை : ஒத்த வடிவம்பெற்ற நேர்வரைய (Similar and rectilinear) உருவங்களை வடிவொத்த உருவங்களெனக் கூறுகிறோம்.

இரு நேர் வரைய உருவங்கள் வடிவொத்ததாய் இருக்க வேண்டுமாயின் இரண்டு நிபந்தனைகள் இன்றியமையாதவை:

(1) ஒரு உருவத்தின் கோணங்கள் முறையே மற்றொரு உருவத்தின் கோணங்களுக்குச் சமமாக விருக்கவேண்டும்.

(2) ஒரு உருவத்தின் பக்கங்கள் மற்றொன்றின் பக்கங்களுக்குச் சம விகிதத்திலிருக்க வேண்டும்.

விளக்கம் : ABCDEF......, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$...... இரண்டும் ஒத்த வடிவமுள்ள பல் கோணங்கள்.

$$(1)\ \left.\begin{array}{l}\angle A = \angle A_1\\ \angle B = \angle B_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \angle F = \angle F_1\\ \dots\ \dots\ \dots\end{array}\right\}\quad (2)\ \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\dots=\frac{EF}{E_1F_1}=\dots\dots$$

இந்த நிபந்தனைகட்குட்படின், இரு உருவங்களும், அதாவது பல் கோணங்களும் வடிவொத்தன வெனக் கூறப் படும்.

(A, A_1); (B, B_1);... (F, F_1)... என்பவை ஒத்த முனைகள் (Corresponding vertices) எனப்படும்.

$(AB, A_1 B_1)$); $(BC, B_1 C_1)$; ... என்பவை ஒத்த பக்கங்களெனப்படும்.

முக்கியக் குறிப்பு: இரண்டு பல் - கோண வடிவங்கள் வடிவொத்தனவாயிருக்க வேண்டுமாயின், இரு நிபந்தனைகளும் ஒருங்கே அமையவேண்டும்.

இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தனவாயிருக்க வேண்டுமாயின், ஏதாமொரு நிபந்தனை இடம் பெறின் சாலும். ஆனால் பல்-கோணங்களைப் பொருத்த மட்டில் அது போதாது.

எடுத்துக் காட்டாக :

(1) ஒரு நீண்ட சதுரமும் (செவ்வகமும்) சம சதுரமும் கோணங்களைச் சமமாய்ப் பெற்றபோதிலும் வடிவொத்தன வல்ல.

(2) ஒரு சாய் சதுரமும் (Rhombus) சம சதுரமும் பக்கங்களைச் சமமாய்ப் பெற்ற போதிலும் வடிவொத்தனவல்ல.

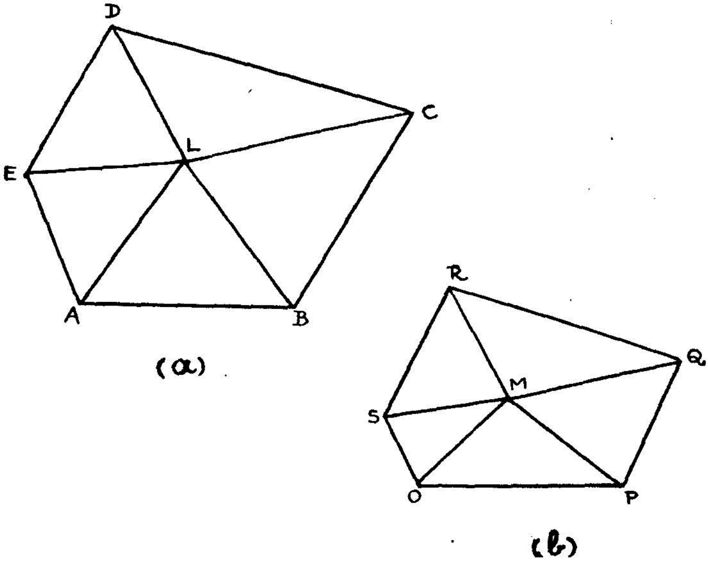
எனவே, இரு நிபந்தனைகளும் ஒருங்கே இன்றியமையாதன.

இரண்டு வடிவொத்த பல்-கோணங்களின் ஒத்த கரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று, ஒரு போகாக வைக்கப்பட்டிருந்தால், அப்பல்-கோணங்கள் இணைப்படவைக்கப் பெற்றிருக்கின்றன (Similarly situated) வெனக் கூறுவது மரபு.

இப்படியாக, இணைப்பட வைக்கப்பெற்ற இரு பல்-கோணங்கள் ஒரு சிறப்புடையன. அவைகளின் ஒத்த முனைகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவலாம். அதன் மறுதலைத் தேற்றமும் உண்மையாகும். மேற்படிப்பில் இவைகளை நீங்கள் அறிவீர்கள்.

தேற்றம் 9

வடிவொத்த பல்-கோணங்களின் பரப்புக்கள் ஒத்த பக்கங்களின் இருபடி விகிதத்திலிருக்கும்.



(படம் 39)

சி. வி: ABCDE, OPQRS இரண்டு வடிவொத்த பல்-கோணங்கள்.

அதாவது $\frac{AB}{OP} = \frac{BC}{PQ} = \ldots \frac{EA}{SO}$

மேலும் $\angle A = \angle O$; $\angle B = \angle P$; $\angle C = \angle Q$......

நி. வே: $\frac{\text{பரப்பு ABCDE}}{\text{பரப்பு OPQRS}} = \frac{AB^2}{OP^2}$ என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ: ABCDEன் உள்ளே L என்ற ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு, A, B, C, D, E ஒடு இணைக்கவும்.

O என்ற புள்ளியில் $\angle POM = \angle BAL$ ஆகவும்
P என்ற புள்ளியில் $\angle OPM = \angle ABL$ ஆகவும்

அமைத்து OM, PM என்ற கோடுகள் வரைக. அவை M என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். M ஒடு, Q, R, Sஐ இணைக்கவும்.

தெ: முதலில் ABCDEம், OPQRSம், ஒவ்வொன்றும், ஐந்து வடிவொத்த முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கப் பட்டிருக்கின்றனவென நிறுவுவோம்.

வ. வ படி, $\triangle LAB ||| \triangle MOP$

$$\therefore \frac{AL}{OM}=\frac{LB}{MP}=\frac{AB}{OP} \qquad (A)$$

$\angle ABC=\angle OPQ$ (சி. வி.) (1)

$\angle ABL=\angle OPM$ (வ. வ) (2)

(1) – (2) : $\angle LBC=\angle MPQ$ எனப் பெறப்படும். (3)

மேலும் $\frac{AB}{OP}=\frac{LB}{MP}$ (நிறுவப்பட்டது) (A)

ஆனால் $\frac{AB}{OP}=\frac{BC}{PQ}$ (சி. வி.)

$$\therefore \frac{BC}{PQ}=\frac{LB}{MP}=\frac{BL}{PM} \qquad (4)$$

எனவே, தேற்றம் 5ன் படி
$\triangle LBC ||| \triangle MPQ$ [(3)ம் (4)ம் கொண்டு பார்க்க] எனப் பெறப்படும்.

அவ்வாறே,

$\triangle LCD ||| \triangle MQR$,

$\triangle LDE ||| \triangle MRS$,

$\triangle LEA ||| \triangle MSO$ என நிறுவலாம்.

தேற்றம் 8ன் படி,

$$\frac{\triangle LAB}{\triangle MOP}=\frac{AB^2}{OP^2}$$

அவ்வாறே $\frac{\triangle LBC}{\triangle MPQ}=\frac{BC^2}{PQ^2}=\frac{AB^2}{OP^2}$

$$\frac{\triangle LCD}{\triangle MQR}=\frac{CD^2}{QR^2}=\frac{AB^2}{OP^2}$$

$$\frac{\triangle LDE}{\triangle MRS}=\frac{DE^2}{RS^2}=\frac{AB^2}{OP^2}$$

$\frac{\triangle LEA}{\triangle MSO}=\frac{EA^2}{SO^2}=\frac{AB^2}{OP^2}$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \frac{AB^2}{OP^2} = \frac{\triangle LAB}{\triangle MOP} = \frac{\triangle LBC}{\triangle MPQ} = \frac{\triangle LCD}{\triangle MQR} = \frac{\triangle LDE}{\triangle MRS} = \frac{\triangle LEA}{\triangle MSO}$$

$$= \frac{\triangle \text{கள் } LAB + LBC + LCD + LDE + LEA}{\triangle \text{கள் } MOP + MPQ + MQR + MRS + MSO}$$

$$= \frac{\text{பல்–கோணம் } ABCDE}{\text{பல்–கோணம் } OPQRS} \quad (\text{நி. பட்டது})$$

பயிற்சி 6

1. இரண்டு வடிவொத்த பல்–கோணங்களின் சுற்றளவு, அவைகளின் ஒத்த இரு பக்கங்களின் விகிதத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

2. ஒரு வட்டத்தின் உள் வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பும், அவ்வட்டத்தைத் தொடும் சதுரத்தின் பரப்பும் 1 : 2 என்ற விகிதத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

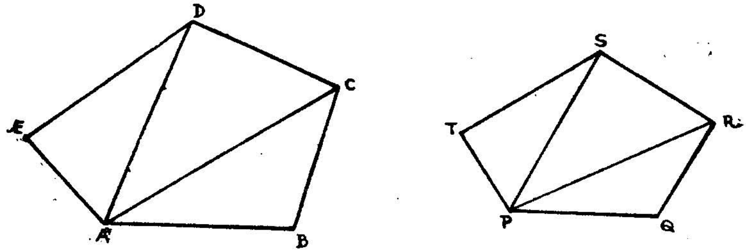
3. மூன்று வடிவொத்த பல்-கோணங்கள், ஒரு செங் கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின்மேல் வரையப்பட்டால், செம்பக்கத்தின் மேல் அமையும் பல்-கோணத்தின் பரப்பு, மற்றிரு பக்கங்களின்மேல் அமையும் பல்-கோணங் களின் பரப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாகுமென நிறுவுக.

4. இரண்டு வடிவொத்த ஐங்கர கோணங்களில் ஒன்று, ஒரு வட்டத்தினுள் அமையுமாயின் மற்றொன்றும் ஒரு வட்டத் தினுள் அமையுமென நிறுவுக. (செ. ப. க).

5. ஒரு வட்டத்திற்கு உள்ளும் வெளியும் வரையப்படும் சமபக்க அறுகோணங்களின் பரப்புக்கள் 3 : 4 என்ற விகிதத் திலுள்ளனவென நிறுவுக (செ. ப. க.)

செய்முறை 8

ABCDE எனக் குறிப்பிட்ட பல்-கோணத்திற்கு வடி வொத்ததாய், ABக்கு இணையாக PQ என்ற பக்கங்கொண்ட, மற்றோர் பல் கோணம் வரைக.



(அ) (ஆ)

(படம் 40)

சி. வி: ABCDE கொடுக்கப்பட்ட பல்-கோணம்.

ABக்கு இணையாக PQ கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.
AB ∥ PQ.

செ. வே: PQஐ ABக்கு இணையான பக்கமாகக் கொண்டு, ABCDEக்கு வடிவொத்த மற்றோர் பல்-கோணம் வரையவேண்டும்.

செ. மு: (A, C), (A, D)ஐ இணைக்க.

P வழியாக ACக்கு இணையாகவும்,
Q வழியாக BCக்கு இணையாகவும்
கோடுகள் வரைக; அவை R-ல் சந்திக்கட்டும்.

P வழியாக ADக்கு இணையாகவும்,
R வழியாக CDக்கு இணையாகவும்,
கோடுகள் வரைக; அவை S-ல் சந்திக்கட்டும்.

P வழியாக AEக்கு இணையாகவும்,
S வழியாக DEக்கு இணையாகவும்,
கோடுகள் வரைக; அவை T-ல் சந்திக்கட்டும்.

PQRST தான் நாம் வேண்டும் பல்-கோணம்.

தெ: ஒத்த பக்கங்கள் இணையாக வரையப்பட்டிருப்பதால், ஒத்த கோணங்கள் சமமாயிருக்கும்.

மேலும், △ABC ||| △PQR

△ACD ||| △PRS

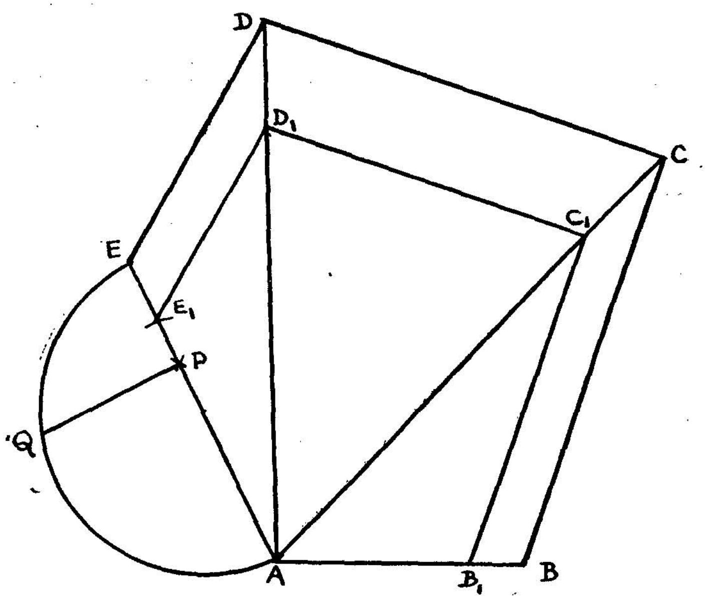
△ADE ||| △PST என்பவை தெளிவாம்.

எனவே ஒத்த பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்திலிருக்கும்.

∴ ABCDE ||| PQRST என நிறுவப்பட்டது.

செய்முறை 9

குறிப்பிட்ட ஒரு பல் - கோணத்திற்கு வடிவொத்த தாயும், அப்பல் - கோணத்தின் பரப்பின் $\frac{p}{q}$ பங்குள்ளதாயுமுள்ள ஒரு பல் - கோணம் வரைக.



(படம் 41)

சி. வி: ABCDE கொடுக்கப்பட்ட பல்-கோணம்.

செ. வே: ABCDEன் பரப்பில் $\frac{p}{q}$ பங்குடையதாய், அதற்கு வடிவொத்ததாயுமுள்ள மற்றோர் பல்-கோணம் வரைய வேண்டும்.

செ. மு. AEல் $AP = \frac{p}{q} AE$ என்ற அளவெடுத்துக் கொண்டு Pஇன் இடங்குறிக்க.

AEஐ விட்டமாகக்கொண்ட ஒரு அரை வட்டம் வரைக.

P வழியாக AEக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு அரை வட்டத்தை Qல் சந்திக்கட்டும்.
AEல், $AE_1 = AQ$ என்ற அளவெடுத்து E_1ன் இடங்குறிக்க.

AD, AC இரண்டையும் சேர்க்க.

E_1 வழியாக EDக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு ADஐ D_1ல் சந்திக்கட்டும்.

அவ்வாறே D_1 வழியாக DCக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு, ACஐ C_1ல் சந்திக்கட்டும். $C_1 B_1$ என CBக்கு இணைக்கோடு வரைந்து, அக்கோடு ABஐ B_1ல் சந்திக்கட்டும்.

$A B_1 C_1 D_1 E_1$தான் நாம் வேண்டும் பல்-கோணம்.

தெ: $A B_1 C_1 D_1 E_1 \parallel ABCDE$ என்பது உடனே தெரிகிறது.

$$\frac{\text{பரப்பு } AB_1C_1D_1E_1}{\text{பரப்பு } ABCDE} = \frac{AE_1^2}{AE^2} \quad (\text{தேற்றம் } 9)$$

$$= \frac{AQ^2}{AE^2}$$

$$= \frac{AP \cdot AE}{AE^2}$$

$$= \frac{AP}{AE}$$

$$= \frac{p}{q}$$

எனவே $AB_1 C_1 D_1 E_1$ தான் நாம் வேண்டிய பல்-கோணம்.

செய்முறைப் பயிற்சி D

1. 5 செ. மீ. பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க அறுகோணம் வரைக.

அதற்கு வடிவொத்து, அதைப்போல்,

(i) அரை மடங்கு,

(ii) இரு மடங்கு,

பரப்புள்ள அறுகோணங்கள் வரைக.

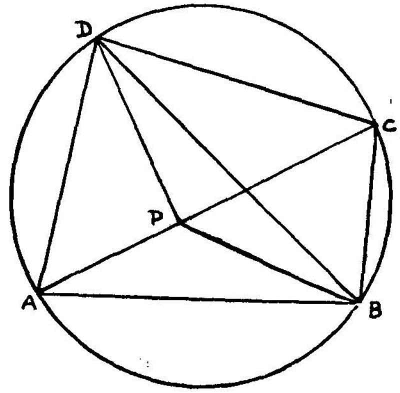
2. AB = 4 செ. மீ.; AC = BD = 6·4 செ. மீ.; ∠A = 100°, ∠B = 120° என்ற அளவு கொண்ட ஒரு நாற்கரம் வரைக. இதற்கு வடிவொத்ததாய், 30 செ. மீ சுற்றளவுள்ள மற்ருேர் நாற்கரம் வரைக.

3. AB = 5·5 செ. மீ., BC = 7·5 செ. மீ., CD = 8·0 செ. மீ., AD = 5 செ. மீ., ∠ABC = 100° என்ற அளவுள்ள ஒரு நாற்கரம் வரைக. அதற்கு வடிவொத்ததாய், அதைப்போல், முக்கால் பங்கு பரப்புடைய மற்ருேர் நாற்கரம் வரைக.

தேற்றம் 10

தாலமித் தேற்றம் (Ptolemy's Theorem)

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில், எதிர்ப்பக்கங்களால் அடைபடும் செவ்வகங்களின் மொத்தப் பரப்பு அதன் மூலை வரைகளால் அடைபடும் செவ்வகத்தின் பரப்புக்குச் சமம்.



(படம் 42)

சி. வி: ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

நி. வே: AB.CD + BC.AD = AC.BD என நிறுவவேண்டும்.

வ. வ: D என்ற புள்ளியில் ∠ADP = ∠CDB என்பதற்கொப்ப, DP என்ற கோடு வரைக. DP என்ற கோடு, ACஐ Pல் வெட்டட்டும். P, B இரண்டையும் இணைக்க.

தெ: △கள் ADP, BDCல்

∠ADP = ∠CDB (வ. வ)

மேலும், $\angle$ DAP = $\angle$ DBC (ஒரே வட்டத் துண்டு CDன் மேல் நிற்கும் கோணங்கள்)

$\therefore \triangle ADP ||| \triangle BDC$

$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{BC}$ (1)

$\therefore AD \cdot BC = AP \cdot BD$ (2)

அவ்வாறே, $\triangle$கள் CDP, BDAல்,

$\angle CDP = \angle CDB + \angle BDP$

$= \angle ADP + \angle PDB$ (வ. வ)

$= \angle ADB$

மேலும், $\angle$ DCP = $\angle$ DBA (ஒரே வட்டத் துண்டு ADன் மேல் நிற்கும் கோணங்கள்)

$\therefore \triangle CDP ||| \triangle BDA$

$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{CP}{BA}$

$\therefore CD \cdot AB = CP \cdot BD$ (3)

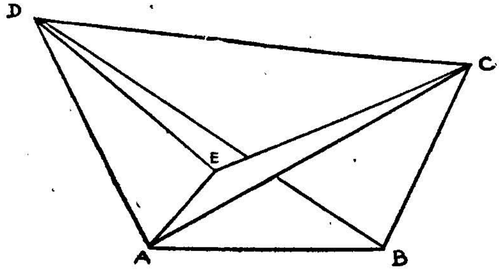
(2)+(3): $AD \cdot BC + CD \cdot AB = AP \cdot BD + CP \cdot BD$

$= (AP + CP) BD$

$= AC \cdot BD$ (நி. பட்டது)

பயிற்சி 7

1. வட்டத்துள் அமைய முடியாத ஒரு நாற்கரத்தில் எதிர்ப்பக்கங்களால் அடைபடும் செவ்வகங்களின் மொத்தப் பரப்பு, மூலை வரைகளால் அடைபடும் செவ்வகத்தின் பரப்பை விட அதிகமென நிறுவுக.



படம் 43

சி. வி: ABCD ஒரு வட்டத்துள் அமைய முடியாத நாற்கரம்.

நி. வே: $AD \cdot BC + AB \cdot CD > AC \cdot BD$ என நிறுவவேண்டும்.

வ. வ: D என்ற புள்ளியில் $\angle ADE = \angle CDB$ ஆகவும் A என்ற புள்ளியில் $\angle DAE = \angle CBD$ ஆகவும் அமையுமாறு, DE, AE என்ற இரு கோடுகள் வரைக.

C, E இரண்டையும் இணைக்கவும்.

தெ: $\triangle$கள் ADE, BDCல்,

$\angle ADE = \angle DBC$ (வ. வ)

$\angle DAE = \angle DBC$ (வ. வ)

$\therefore \triangle ADE \,|||\, \triangle BDC$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC} = \frac{DE}{DC} \quad (1)$$

$$\therefore AD \cdot BC = AE \cdot BD \quad (2)$$

மேலும், $\triangle$கள் CDE, BDAல்,

$$\angle CDE = \angle CDB + \angle BDE$$
$$= \angle EDA + \angle BDE \; (\angle CDB = \angle EDA \text{ வ.வ})$$
$$= \angle ADB \quad (3)$$

பிறகு (1) ன்படி, $\frac{AD}{BD} = \frac{DE}{DC}$

$$\therefore \frac{DC}{DE} = \frac{DB}{DA} \quad (4)$$

(3) ம் (4) ம் எடுத்துக் கொண்டால்,
தேற்றம் 5ன் படி, $\triangle CDE \,|||\, \triangle BDA$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{DE}{DA} = \frac{CE}{BA}$$

$$\therefore AB \cdot CD = CE \cdot BD \quad (5)$$

(2)+(5): $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AE \cdot BD + CE \cdot BD$

$$= BD\,(AE + CE)$$
$$> BD \cdot AC \; (\because AE + CE > AC)$$

(நி. பட்டது)

2. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $DA=d$. மூலைவரைகள் $AC=y$; $BD=x$. கீழ்க் கண்டவற்றை நிறுவுக.

(1) $$\frac{x}{y}=\frac{ab+cd}{ad+bc};$$

(2) $$x^2=\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)}{(ad+bc)};$$

(3) $$y^2=\frac{(ad+bc)\,(ac+bd)}{(ab+cd)}.$$

3. ஒரு சம பக்க ஐங்கோணத்தில் ஒரு மூலைவரையின் நீளத்தை, ஒரு பக்கத்தின் அளவாகக் கூறுக. (செ. ப. க.)

4. ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம். BDக்கு இணைக்கோடாக, AE என்ற நாண் (Chord) வரையப்படுகிறது.

$AB.\ BC+AD.\ DC=BD.\ CE$ என நிறுவுக. (செ.ப.க.)

5. AB என்ற வட்டவில்லின் மேல் P ஒரு புள்ளி. $PA=PB$ ஆனால், $PA+PB$ன் கூட்டுத்தொகை மீப்பெரு மதிப்பாகும் என நிறுவுக. (செ. ப. க.)

6. ABC என்ற சமபக்க △ன் சுற்றுவட்டத்தில், BC என்ற சிறு வில்லின்மேல் P ஒரு புள்ளி. $PA=PB+PC$ என நிறுவுக.

7. ஒரு வட்ட வரையின் மேல், A,B இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள்; AB என்ற சிறு வில்லின் மையம் C; AB என்ற பெரு வில்லின்மேல் P என்ற ஒரு புள்ளி இயங்குகிறது. $AP+PB : CP$ ஒரு மாறிலி என நிறுவுக. (செ. ப. க.)

8. ABCDE ஒரு சமபக்க ஐங்கோணம். $AC^2-AB^2=AC\cdot AB$ என நிறுவுக. இம்முடிவைக் கொண்டு, ஒரு மூலை வரையின் அளவை, ஒரு பக்கத்தின் அளவோடு ஒப்பிடுக. இம்முடிவைக்கொண்டு $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ எனக் காண்க.

9. ABCDEF என்ற ஒரு சம பக்க அறுகோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் AB என்ற சிறு வில்லின்மேல் P ஒரு புள்ளி.

$PA+PB+PC+PF=PD+PE$ என நிறுவுக.

10. △ ABCன் பக்கங்களின் மையங்கள் A^1, B^1, C^1. முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் S. R, r முறையே, சுற்றுவட்ட, உள்தொடு வட்ட ஆரங்கள்.

$SA^1+SB^1+SC^1=R+r$ என நிறுவுக.

3. ஒன்றிய சந்திப்பும் ஒரு வரைமையும்

(Concurrency and Collinearity):

வரையறைகள் :

(1) ஒன்றிய சந்திப்பு: இரண்டுக்கு மேற்பட்ட நேர்க் கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்குமாயின், அல்லது ஒரே புள்ளியின் வழியாகச் செல்லுமாயின், அக்கோடுகள் ஒன்றிய சந்திப்புடையன என்று கூறப்படும்.

(2) ஒரு வரைமை: ஒரே நேர்க்கோட்டில் இரண்டுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் அமையுமானல், அப்புள்ளிகள் ஒரு வரைமையுடையன என்று கூறப்படும்.

ஒரு முக்கோணத்திற்குரிய, மூன்று கோடுகள், குறிப்பிட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டால், ஒன்றிய சந்திப்புடையன என 11, 13ம் தேற்றங்களில் நிறுவப்படும். இந் நிபந்தனைகள் பொதுத் தன்மை யுடையன.

ஒரு முக்கோணத்திற்குரிய, மூன்று புள்ளிகள், குறிப்பிட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்டால், ஒரு வரைமை யுடையன, எனத் தேற்றம் 12ல் நிறுவப்படும். இந் நிபந்தனையும், பொதுத் தன்மை யுடையது.

12, 13ம் தேற்றங்களில், திசைக் கோட்டு அடிப்படையில் விகிதக் குறியீடு கட்டாயம் கொடுக்க வேண்டிய இன்றியமை யாமை ஏற்படுகின்றது. தெரிப்பு முறையில் அக்குறியீடுகள் பெரிதும் தேவைப்படுகின்றன.

திரும்பவும், இக்குறியீடுகளை, நினைவுபடுத்தும் முறையில்:



(படம் 44)



(படம் 45)

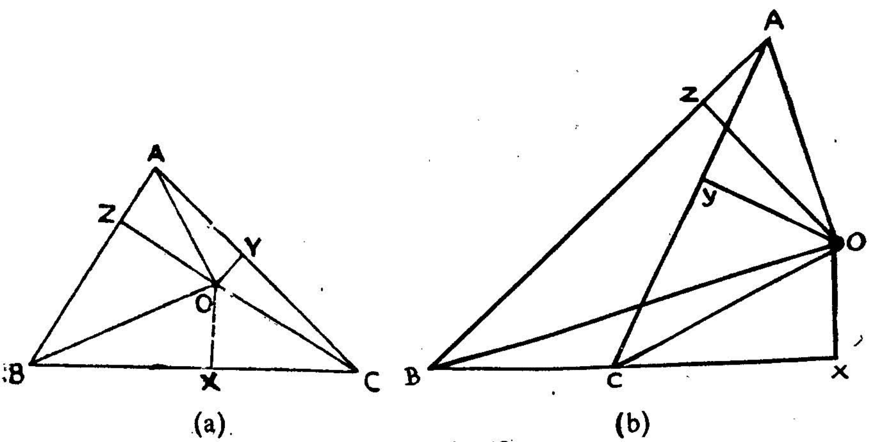
படம் 44ல் $\frac{\overline{AP}}{PB}$ = கூட்டெண் விகித மதிப்பு.

படம் 45ல் $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ = குறையெண் விகித மதிப்பு.

இவைகளையும் மறுபடியும் நினைவுபடுத்திக்கொண்டு பின் வரும் 12, 13ம் தேற்றங்களைக் கவனிக்கவும்.

தேற்றம் 11

ABC ஒரு முக்கோணம். முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில் X, Y, Z என்ற புள்ளிகளினின்றும் அப்பக்கங் களுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள், ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமாயின், $BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$



படம் 46

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம்

BC. CA, ABன் மேல், அல்லது அவைகளின் நீட்டலின் மேல், X, Y, Z என்ற புள்ளிகளில் உயர்த்தப்படும் குத்துக் கோடுகள் XO, YO, ZO என்பவை O என்ற புள்ளியில் ஒருங்கே சந்திக்கின்றன. (படம் 46 (a)ல் O உள்ளே; 46 (b)ல் O வெளியே).

நி. வே : $BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$ என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ : O–ஐ A, B, C ஒடு இணைக்கவும்.

தெ : $\triangle OBX$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.
அவ்வாறே $\triangle OCX$ம்.

$\therefore\ BX^2 = OB^2 - OX^2$
$XC^2 = OC^2 - OX^2$

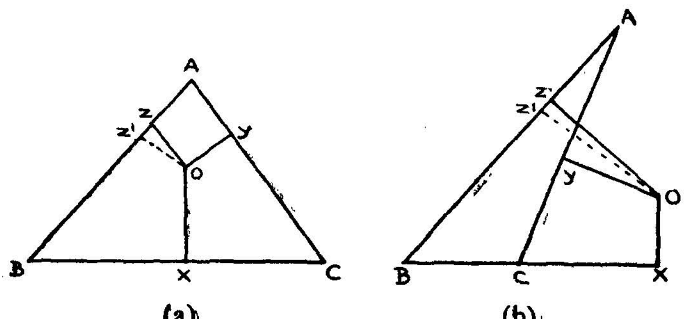
$\therefore\ BX^2 - XC^2 = OB^2 - OC^2$

அவ்வாறே, $CY^2 - YA^2 = OC^2 - OA^2$
$AZ^2 - ZB^2 = OA^2 - OB^2$

$\therefore\ BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$ என நிறுவப் பட்டது.

மறுதலைத்தேற்றம் 11 (a)

ABC ஒரு முக்கோணம். $BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$ என்பதற்கொப்ப, முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில் X, Y, Z என்ற புள்ளிகள் அமைந்திருக்குமானல் (அல்லது அப்படி நாம் எடுப்போமானல்) அப்புள்ளிகள் வழியாக, BC, CA, AB என்ற பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடுகள், ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.



(படம் 47)

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம். $BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கொப்ப, முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில் X, Y, Z என்ற புள்ளிகள் அமைந்திருக்கின்றன.

நி. வே: X, Y, Zல் முறையே BC, CA, ABக்கு வரையப் படும் குத்துக்கோடுகள் O என்ற ஓர் புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ: X, Y என்ற புள்ளிகள் வழியாக BC, CAக்குக் குத்துக்கோடுகள் வரைக. அவை O என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

O, Z இரண்டையும் இணைக்க. அப்போது OZ $\perp$AB ஆக இருக்கும். இல்லையேல் Oவிலிருந்து ABக்குச் செங்குத்தாக, OZ^1 என்ற கோடு வரைக. Z, Z^1 ஒரே புள்ளியென நிறுவுவோம்.

தெ: X, Y, Z^1 என்ற புள்ளிகள் வழியாக வரைந்த குத்துக்கோடுகள் Oல் சந்திக்கின்றன.

$\therefore\ BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^{1\,2} - Z^1B^2 = 0$ உண்மையாகும். ஆனால் $BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$ என கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore\ AZ^{1\,2} - Z^1B^2 = AZ^2 - ZB^2$$

$$\therefore\ (AZ^1 + Z^1B)\,(AZ^1 - Z^1B) = (AZ + ZB)\,(AZ - ZB)$$

ஆனால் $AZ^1 + Z^1B = AB = AZ + ZB$ (1)

$$\therefore\ AB\,(AZ^1 - Z^1B) = AB\,(AZ - ZB) \quad (2)$$

$$\therefore\ AZ^1 - Z^1B = AZ - ZB$$

(1)+(2): $2\,AZ^1 = 2\,AZ$

$$\therefore\ AZ^1 = AZ$$

$\therefore$ Z, Z^1 வெவ்வேறு புள்ளிகள் அன்று, ஒன்றே.

$\therefore$ OZ$\perp$AB என நிறுவப்பட்டது.

$\therefore$ X, Y, Z என்ற புள்ளிகளில் வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் O என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

கிளைத் தேற்றங்கள்:

(1) ஒரு முக்கோணப் பக்கங்களின் செங்குத்து மைய வெட்டிகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோடுகள் (altitudes) ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

பயிற்சி 8

1. மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. அவைகளின் பொது நாண்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன வென நிறுவுக.

2. மூன்று வட்டங்கள், இரண்டிரண்டாகத் தொடுகின் றன. தொடுமிடங்களில் வரையப்படும் தொடு வரைகள் மூன் றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

3. ABC ஒரு முக்கோணம். பக்கங்களின் மையங்கள் D, E, F; செங்கோடுகள் பக்கங்களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் L, M, N. X, Y, Z முறையே DL, EM, FNன் மையப்புள்ளி கள். X, Y, Z வழியாக, BC, CA, ABக்கு வரையப்படும் குத் துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

4. S என்ற புள்ளியிலிருந்து, ABC என்ற முக்கோணத் தின் பக்கங்களுக்கு, முறைப்படி, SX, SY, SZ என்று குத்துக் கோடுகள் வரையப்பட்டிருக்கின்றன. A, B, C வழியாக முறையே YZ, ZX, XYக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

5. I_1, I_2, I_3 என்பவை, ABC என்ற முக்கோணத்தின் வெளிதொடு வட்டங்களின் மையங்கள். I_1, I_2, I_3, விலிருந்து முறையே BC, CA, AB மேல் வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

மேலும், A, B, Cலிருந்து, $I_2 I_3$, $I_3 I_1$, $I_1 I_2$ மேல் வரையப் படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

6. ஒரு நேர்க்கோட்டின்மேல், P, Q, R மூன்று புள்ளிகள்; PA, QB, RC அக்கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடுகள்; P, Q, Rலிருந்து முறையே BC, CA, ABன் மேல் வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் ஒருபுள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

7. நான்காம் கணக்கில் S, முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையமானல், அங்குக் கடைசியாகக் கூறப்பட்ட சந்தி, செங் கோட்டுச் சந்தியென நிறுவுக.

8. நான்காம் கணக்கில், S செங்கோட்டுச் சந்தியானல், கடைசியாகக் கூறப்பட்ட சந்தி சுற்றுவட்ட மையமென நிறுவுக.

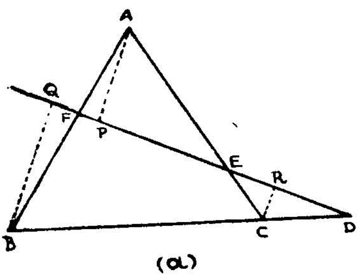
9. ABC, PQR இரு முக்கோணங்கள். A, B, C லிருந்து முறையே QR, RP, PQக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமானல், P, Q, Rலிருந்து முறையே BC, CA, ABக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

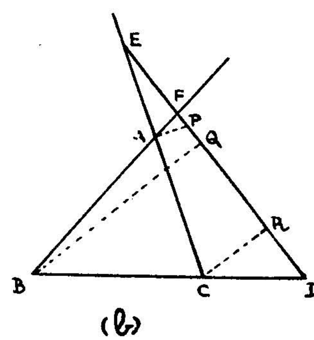
தேற்றம் 12

மெனிலாஸ் தேற்றம் (Menelaus' Theorem)

ABC ஒரு முக்கோணம். DEF என்ற யாதாமொரு குறுக்குக் கோடு, BC, CA, AB என்ற பக்கங்களை, முறையே, D, E, F என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுமாயின்,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$





(படம் 48)

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம்.

48 (*a*) படத்தில், குறுக்குக் கோடு DEF, BCன் நீட்டலையும், CA, ABஐ உள்ளேயும் வெட்டுகிறது.

48 (*b*) படத்தில், குறுக்குக் கோடு DEF, எல்லாப் பக்கங்களையும் வெளியே வெட்டுகிறது.

நி.வே : $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$ என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ : A, B, C வழியாக, DEFக்கு, முறையே AP, BQ, CR என்ற குத்துக்கோடுகள் வரைக.

தெ: 48 (a)–ல் D என்ற புள்ளி BCன் நீட்டலின்மேல் இருப்பதால், குறியீட்டு முறைப்படி $\frac{BD}{DC}$ ஒரு குறை விகிதம் (Negative ratio);

மற்றிரண்டு விகிதங்களான, $\frac{CE}{EA}$, $\frac{AF}{FB}$ கூட்டு விகிதங்கள் (Positive ratios);

48 (b)–ல், D, E, F என்ற புள்ளிகள் மூன்றும், BC, CA, ABன் நீட்டல்களில் இருப்பதால், $\frac{BD}{DC}$, $\frac{CE}{EA}$, $\frac{AF}{FB}$ மூன்றும் குறை விகிதங்களாகும்.

எனவே 48 (a)ல்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = (-)\ (+)\ (+) = -$$ (குறை மதிப்பு)

48 (b) ல் $\frac{BD}{CE} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = (-)(-)(-) = -$ (குறை மதிப்பு)

வ. வ படி, AP, BQ, CR மூன்றும் DEFக்குக் குத்துக் கோடுகளாதலின்,

$$AP \parallel BQ \parallel CR$$

$$\therefore\ \frac{BD}{DC} = -\frac{BQ}{CR}$$ (இரு படங்களிலும்)

$$\frac{CE}{EA} = \pm\frac{CR}{AP}$$ 48 (a)ல் +; 48 (b)ல் −)

$$\frac{AF}{FB} = \pm\frac{AP}{BQ}$$ (48 (a)ல்+; 48 (b)ல் −)

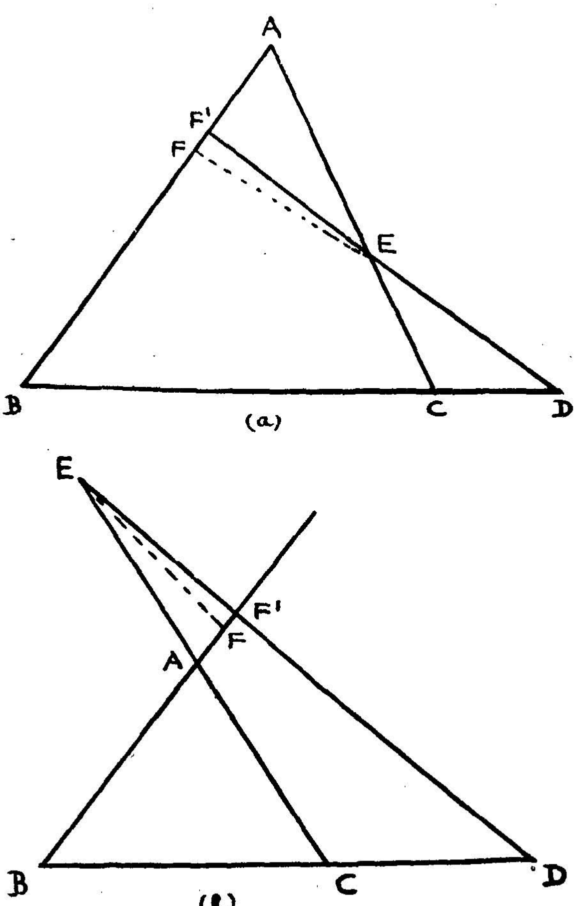
$$\therefore\ \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -\frac{BQ}{CR} \times \left(\pm\frac{CR}{AP}\right) \times \left(\pm\frac{AP}{BQ}\right)$$

$= -1$ என நிறுவப்பட்டது.

தேற்றம் 12 (a)

மெனிலாஸ் தேற்றம்—மறுதலை.

ABC ஒரு முக்கோணம். $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = -1$ என்ற சமன்பாட்டுக்கொப்ப, முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில் D, E, F என்ற புள்ளிகள் அமையுமாயின், (அல்லது நாம் அப்படி எடுத்துக்கொண்டால்), அப்புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும்.



(படம் 49)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்.

BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில்,

$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$ என்ற சமன்பாட்டுக் கொப்ப, D, E, F என்ற புள்ளிகள் அமைந்திருக் கின்றன.

நி. வே: D, E, F ஒரு நேர்க்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ: D, E இரண்டையும் இணைத்தால் (அல்லது) இணைத்து நீட்டினுல், DE என்ற அக்கோடு F வழியாகச் செல்லும். இல்லையேல், DE என்ற கோடு, ABஐ F^1 என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றதெனக் கொள்வோம். இப்போது, F, F^1 என்பவை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் அல்ல, ஒரே புள்ளிதான் என்று நிறுவினுல், தேற்றம் நிறுவப் படும்.

தெ: DEF^1 ஒரு குறுக்குக் கோடாதலால்,
$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF^1}{F^1B} = -1$ என்பது உண்மை.

ஆனல் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

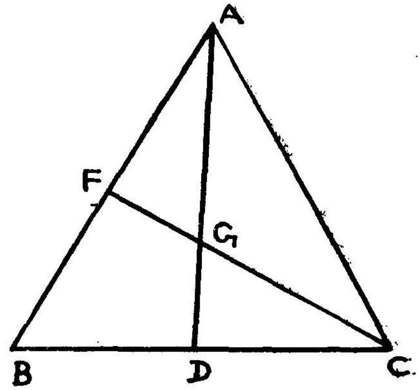
$\therefore \frac{AF^1}{F^1B} = \frac{AF}{FB}$ எனப் பெறப்படுகிறது. அதாவது AB என்ற நீளத்தை, F, F^1 என்ற இரு புள்ளிகள் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கிறதெனப் பெறப்படுகிறது.

ஆனல் தேற்றம் (1)ன் படி, இது இயலாது.

∴ F, F^1 வெவ்வேறு புள்ளிகள் அல்ல, ஒன்றே. எனவே DE என்ற கோடு F வழியாகப் போகிறது. அதாவது D, E, F என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 9

1. ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு சமவெட்டிகள் ஒன்றையொன்று முச்சமக் கூறில் வெட்டுகின்றன.



(படம் 50)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்.

AD, CF இரண்டு சமவெட்டிகள். அவை Gல் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

நி. வே: $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ என நிறுவ வேண்டும்.

தெ: △ ABDன் பக்கங்களை, FGC என்ற குறுக்குக்கோடு வெட்டுகின்றதெனக் கொள்க.

தேற்றம் 12ன்படி,

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{DG}{GA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

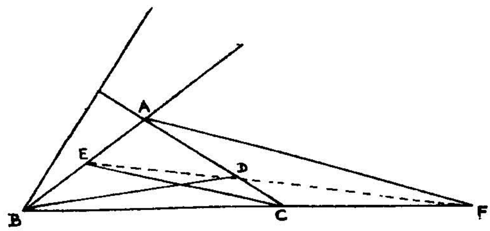
$$\therefore \quad -\frac{2}{1} \cdot \frac{DG}{GA} \cdot \frac{1}{1} = -1$$

$$\therefore \quad \frac{DG}{GA} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$$ என நிறுவப்பட்டது.

அவ்வாறே மற்றொன்றும் நிறுவலாம்.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களின் உள் சமவெட்டியும், மூன்றும் கோணத்தின் வெளிச்சமவெட்டியும், அவ்வக்கோணங்களின் எதிர்ப்பக்கங்களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளும் ஒரு வரைமையுடையன (Collinear-ஒரே நேர்க் கோட்டிலுள்ளன) என நிறுவுக.



(படம் 51)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்.

∠B, ∠Cன் உள் மையவெட்டிகள், BD, CE எதிர்ப்பக்கங்களை D, Eல் சந்திக்கின்றன.

∠Aன் வெளி மையவெட்டி, BCன் நீட்டலை, F-ல் சந்திக்கின்றது.

நி. வே: E, D, F ஒரு வரைமையுடையன என நிறுவ வேண்டும்.

தெ: $\frac{BF}{FC} = -\frac{AB}{AC}$; (தேற்றம்)

$$\frac{CD}{DA} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$$

$$\therefore \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EB} = \frac{-AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC}$$

∴ E, D, F ஒரு வரைமையுடையன (நி. பட்டது.)

3. ABC என்ற ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களை, முறையாக ஒரு குறுக்குக் கோடு; P, Q, R, Sல் வெட்டுகின்றது. $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = +1$ என நிறுவுக.

4. ஒரு முக்கோணம் ABCன் வெளிதொடு வட்டங்களின் மையங்கள் P, Q, R. QR, RP, PQ முறையே BC, CA, ABஐ L, M, N என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. L, M, N ஒரு வரைமையுடையனவென நிறுவுக.

5. ABC என்ற முக்கோணத்தினுள் O என்பது ஒரு புள்ளி. BOC, COA, AOB என்ற கோணங்களின் வெளி மையவெட்டிகள், BC, CA, ABஐ சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒரு வரைமையுடையனவென நிறுவுக.

6. ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்திற்கு, A, B, C வழியாக வரையப்படும் தொடுவரைகள் எதிர்ப்பக்கங்களை X, Y, Z என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. X, Y, Z ஒரு வரைமை யுடையனவென நிறுவுக.

7. ABC என்ற முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. அவை BC,CA,ABஐ D, E, F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. EF, FD, DE என்பவை, BC, CA, ABஐ முறையே X, Y, Zல் சந்திக்கின்றன. X, Y, Z ஒரு வரைமை யுடையன வென்றும் $\frac{BD}{DC} = \frac{BX}{XC}$ எனவும் நிறுவுக.

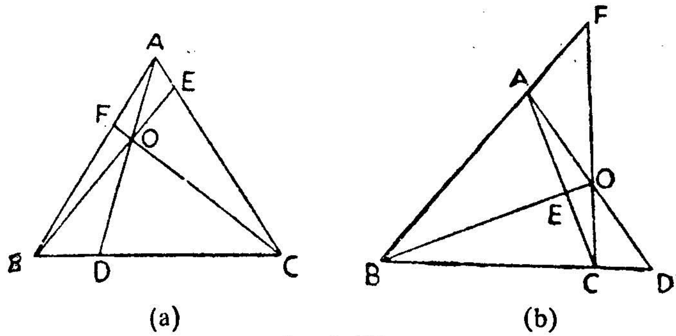
8. D, E, F என்பவை ABC என்ற முக்கோணத்தின் முறையான பக்கங்களின் மையங்கள். ஒரு குறுக்குக் கோடு, இப்பக்கங்களை முறையே P, Q, Rல் சந்திக்கின்றன. முக்கோணம் DEFன் பக்கங்களை, AP, BQ, CR வெட்டுமிடங்கள் ஒரு வரைமையுடையனவென நிறுவுக.

9. ABC ஒரு முக்கோணம். ABல் P, Q என்ற புள்ளிகள் 6 PQ = 3 AP = 2 QB என்ற அமைப்பிலும், ACல் R, S என்ற புள்ளிகள் 6 RS = 3 SC = 2 AR என்ற அமைப்பிலும்கொள்ளப்படுகின்றன. PR, QS என்ற இரு கோடுகளும், BCன் மேல் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

தேற்றம் 13

கேவாவின் தேற்றம்

ABC ஒரு முக்கோணம். O என்ற ஏதாமொரு புள்ளியோடு, A, B, C என்ற உச்சிகளை யிணைக்கும் கோடுகள் எதிர்ப்பக்கங்களை D, E, F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்குமாயின் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$



(படம் 52)

சி. வி. ABC ஒரு முக்கோணம்; O ஏதாமொரு புள்ளி.

[படம் 52(a)ல் O முக்கோணத்திற்கு உள்ளே யிருக்கிறது. 52(b)ல் O முக்கோணத்திற்கு வெளியே யிருக்கிறது]

OA, OB, OC முறையே BC, CA, ABஐ D, E, F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

நி. வே: $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ என நிறுவ வேண்டும்.

[52(a)ல் $\frac{BD}{DC}$, $\frac{CE}{EA}$, $\frac{AF}{FB}$ யாவும் கூட்டு விகிதங்கள்.

எனவே $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = (+)(+)(+) = +$

52(b)ல் $\frac{CE}{EA}$, கூட்டு விகிதம். மற்றிரண்டும் குறை விகிதங்கள்.

எனவே, $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = (-)(+)(-) = +$

தெ : $\frac{BD}{DC} = \frac{\text{பரப்பு } \triangle ABD}{\text{பரப்பு } \triangle ACD} = \frac{\triangle BOD}{\triangle COD}$

$= \frac{\triangle ABD - \triangle BOD}{\triangle ACD - \triangle COD} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}$ [தேற்றம் 4]

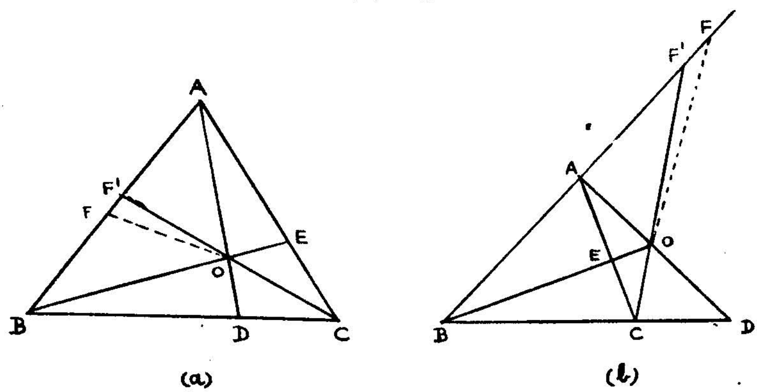
அவ்வாறே, $\frac{CE}{EA} = \frac{\triangle BOC}{\triangle BOA}$

$\frac{AF}{FB} = \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}$

$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} \cdot \frac{\triangle BOC}{\triangle BOA} \cdot \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}$
$= +1$

தேற்றம் 13 (a)
கேவாவின் தேற்ற மறுதலை

ABC ஒரு முக்கோணம்; $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ என்பதற்கொப்ப, முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில் D, E, F என்ற புள்ளிகள் அமையுமாயின், AD, BE, CF என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.



(படம் 53)

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம்.
$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot = +1$ என்ற தொடர்புக்கொப்ப, முறையே, BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில், D, E, F என்ற புள்ளிகள் அமைந்திருக்கின்றன.

நி. வே: AD, BE, CF மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

வ. வ: AD, BE இரண்டும் O-ல் சந்திக்கட்டும்.
COஐ இணைத்தால் அது F வழியே செல்லும்.
இல்லையேல் CO, ABஐ F^1ல் சந்திக்கட்டும்.

தெ: AD, BE, CF^1 மூன்றும் O-ல் சந்திப்பதால்,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF^1}{F^1B} = +1 \qquad \text{(தேற்றம் 13)}$$

ஆனால் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$\therefore \frac{AF^1}{F^1B} = \frac{AF}{FB}$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது AB என்ற நீளம், F^1, F என்ற இரு புள்ளிகளில் [53 (*a*)ல் உள்ளும், 53 (*b*)ல் வெளியும்] ஒரு விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனப் பெறப்படுகிறது.

ஆனால் தேற்றம் 1ன்படி, ABஐ, ஒரே ஒரு புள்ளியில் தான் உள்ளேயோ, வெளியேயோ, ஒரு விகிதத்தில் பிரிக்க முடியும்.

∴ F, F^1 இரண்டும் வெவ்வேறு புள்ளிகள் அல்ல; ஒரே புள்ளிதான்.

ஆகவே CO என்பது F வழியாகச் செல்லும்.

∴ AD, BE, CF மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் (O) சந்திக்கின்றன.

கிளைத் தேற்றங்கள்:

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

(2) ஒரு முக்கோணத்தில்,

(i) உட்கோண மைய வெட்டிகள், ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். அப்புள்ளி I எனக் குறிப்பிடப்படும் உள் வட்ட மையம்.

(ii) இரு வெளிக்கோண மைய வெட்டிகளும், மூன்றும் உட்கோண மைய வெட்டியும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

குறிப்பு: உட்கோணம் A, வெளிக்கோணங்கள் B, C, இவைகளின் மைய வெட்டிகள், I_1 எனக் குறிப்பிடப்படும் ஒரு வெளிதொடு வட்ட (ex-circle) மையமாகும்; அவ்வாறே I_2, I_3 மற்றிரு வெளிதொடு வட்ட மையங்கள்.

பயிற்சி 10

1. AD, BE, CF என்பவை ABC என்ற முக்கோணத்தில் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் கோடுகள். EF, FD, DEன் மையங்கள் முறையே P, Q, R. AP, BQ, CR மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

2. ABC என்ற முக்கோணத்தின் வெளிதொடு வட்டங்கள், BC, CA, AB என்ற பக்கங்களை, முறையே X, Y, Zல் தொடுகின்றன. AX, BY, CZ மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

[குறிப்பு: $BX = s - c$; $CY = s - a$; $AZ = s - b$; $XC = s - b$; $YA = s - c$; $ZB = s - a$]

3. ABC ஒரு முக்கோணம். BC, CA, ABக்கு இணைக்கோடுகளாக, முக்கோணத்தின் உள் வட்டத்திற்குத் தொடுவரைகள் வரையப்படும். அவை உள் வட்டத்தைத் தொடுமிடங்கள் முறையே A^1, B^1, C^1. AA^1, BB^1, CC^1 மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக. (செ. ப. க).

4. ABC என்ற முக்கோணத்தில் AD ஒரு மையக்கோடு; O என்பது ADன்மேல் ஒரு புள்ளி. BO, CO இரண்டும் எதிர்ப் பக்கங்களை X, Y என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. $XY \parallel BC$ என நிறுவுக.

5. ஒரு வட்டம், BC, CA, AB என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களை, D, D_1; E, E_1; F, F_1 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AD, BE, CF மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமாயின், AD_1, BE_1, CF_1 மூன்றும் மற்றோர் புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

6. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களின்மேல் DBC, ECA, FAB என்ற சமபக்க முக்கோணங்கள் வரையப்படுகின்றன. AD, BE, CF மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

மேலும் $AD = BE = CF$ எனவும் நிறுவுக. (செ. ப. க.)

4. முக்கோணத்தின் தன்மைகள்

(Properties of triangles):

முக்கோண உருவம், வடிவ கணிதத்திலும், முக்கோண கணிதத்திலும், மையங்கொண்டு திகழ்கிறது. அவ்வுருவத் திற்குப் பல பல சிறப்பான தன்மைகள் உள்ளன. அப் பண்பு களினூடே நிலவும் சீரிய ஒழுங்குமுறை கவிதை மாண்புடை யது.

அப்பண்புகளில் பலவற்றை நீங்கள் அறிவீர்கள். மேலும் சில தன்மைகளைப் பின்வரும் தேற்றங்களில் காணலாம்.

ஒரு முக்கோணத்திற்குச் சிறப்பாக அமையும்

(i) கோடுகள் பலவகைப்பட்டன: மையக்கோடுகள், செங்கோடுகள், மையக்குத்துக் கோடுகள், கோணங்களின் உள், வெளி மைய வெட்டிகள்.........முதலியன;

(ii) புள்ளிகள் பல்வகைப்பட்டன:மையக் கோட்டுச் சந்தி, செங்கோட்டு மையம், சுற்று, உள்தொடு, வெளிதொடு வட்ட மையங்கள்........முதலியன;

(iii) வட்டங்கள் பல்வகைப்பட்டன: சுற்று, உள், வெளி தொடு வட்டங்கள், ஒன்பது குற்று வட்டம்........முதலியன.

இவைகளைப்பற்றிய சில சிறப்பான பண்புகளையும், இவை களுக்கிடைப்பட்ட சில நுட்பமான தொடர்புகளையும் பின் வரும் சில தேற்றங்களில் பார்ப்போம்.

முக்கோணத்தின் உறுப்புக்கள் முதலியனபற்றிய மரபுக் குறியீடுகள் (Conventional Symbols);

பின்வரும் தேற்றங்களிலும், அவைகளை யொட்டிய பயிற்சிகளிலும், (வேறு விதமாகக் குறிப்பிடப்படாத விடத்து). $\triangle$ ABCக்குரிய புள்ளிகள், கோடுகள் முதலியன பின்வருமாறு குறிப்பிடப்படும்.

1. முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் : $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, என்பவை குறிப்பிட்ட பக்கங்களின் நீளங்கள்.

முக்கோணத்தின் சுற்றளவு $=2s=a+b+c$.

முக்கோணத்தின் பாதி சுற்றளவு $=s=\dfrac{a+b+c}{2}$.

2. A^1, B^1 C^1 என்பவை முறையே BC, CA, ABன் மையப் புள்ளிகள் ; (Mid-points of the sides).

AA^1, BB^1, CC^1 மையக் கோடுகள் ; (Medians)

G மையக் கோட்டுச் சந்தி. (Centroid).

3. A, B, C லிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகள் AD, BE, CF (altitudes) ;

D, E, F செங்கோட்டுப் பாதங்கள் (Feet of the altitudes) ;

$\triangle$DEF செவ்வடி முக்கோணம் (Pedal $\triangle$ of $\triangle$ABC) ;

O செங்கோட்டு மையம் (ortho-centre).

4. A^1S, B^1S, C^1S என்பவை முறையே BC, CB, ABன் செங்குத்துச் சமவெட்டிகள் (perpendicular bisectors of the sides) :

S சுற்றுவட்ட மையம் (Circum-centre) ;

R சுற்றுவட்ட ஆரம் (Circum-radius-length of) ;

2R சுற்றுவட்ட விட்டம் (Circum-diameter-length of).

5. AI, BI, CI என்பவை முறையே $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ன் உள் கோண மைய வெட்டிகள் (Internal bisectors of the angles) ;

I உள் தொடு வட்ட மையம் (In-centre) ;

r உள் தொடு வட்ட ஆரம் (In-radius) .

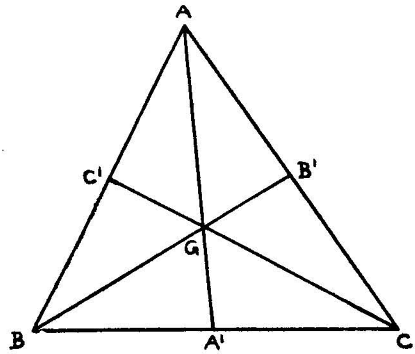
6. I_1, I_2, I_3 முறையே எதிர்ப்பக்கமாய் அமையும் வெளி தொடு வட்ட மையங்கள் (ex-centres opposite to A,B,C respectively) ;

r_1, r_2. r_3 முறையே அவ்வட்டங்களின் ஆரங்கள் (ex-radii) ;

7. P, Q, R முறையே AO, BO, COன் மையப்புள்ளிகள்.

தேற்றம் 14

ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்; சந்திக்குமிடமாகிய மையக்கோட்டுச் சந்தியில், ஒவ்வொரு மையக்கோடும், முச்சமக்கூறில் பிரிவு படுகிறது.



(படம் 54)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்.
A^1, B^1, C^1 பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள்.
AA^1, BB^1, CC^1 மையக் கோடுகள்.

நி. வே. (1) AA^1, BB^1, CC^1 ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவ வேண்டும்.

தெ: $BA^1 = A^1C$
$CB^1 = B^1A$
$AC^1 = C^1B$

$$\therefore \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB^1}{B^1A} \cdot \frac{AC^1}{C^1B} = +1$$

∴ கேவாவின் தேற்றப்படி (தேற்றம் 13) AA^1, BB^1, CC^1 மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவப்பட்டது.

அச்சந்திப் புள்ளி G என்பது இம் முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தி (Centroid) எனப்படும்.

நி. வே (2) G என்ற புள்ளியில் AA^1, BB^1, CC^1 என்ற மையக்கோடுகள் முச்சமக்கூறில் பிரிவுபடுகின்றன என நிறுவ வேண்டும். அதாவது,

$$\frac{AG}{GA^1} = \frac{2}{1} = \frac{BG}{GB^1} = \frac{CG}{GC^1}$$ என நிறுவ வேண்டும்.

தெ: BGB^1 என்ற குறுக்குக்கோடு, $\triangle AA^1C$ன் பக்கங்களாகிய A^1C, CA, AA^1ஐ முறையே B (பக்க நீட்டல்வெட்டு), B^1, G என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

∴ மெனிலாஸ் தேற்றப்படி,

$$\frac{A^1B}{BC} \cdot \frac{CB^1}{B^1A} \cdot \frac{AG}{GA^1} = -1$$

$$\frac{A^1B}{BC} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{CB^1}{B^1A} = 1$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{AG}{GA^1} = -1$$

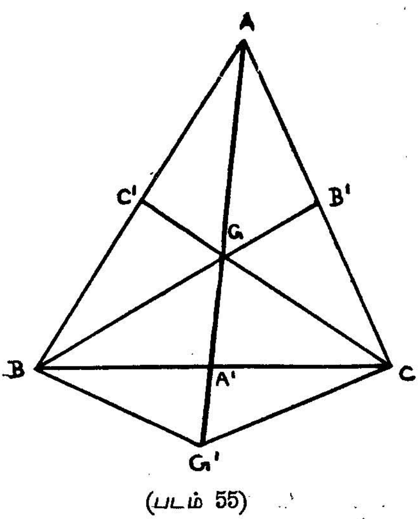
$$\therefore \quad \frac{AG}{GA^1} = \frac{2}{1}$$

இவ்வாறே, $\frac{BG}{GB^1} = 2 = \frac{CG}{GC^1}$ என நிறுவலாம்.

(நி. பட்டது).

மற்றோர் முறையில் இத்தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.

செய்முறைப் பயிற்சியில் இத்தெரிப்பு முறை பயன்படும்.



(படம் 55)

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம்.
B^1, C^1 என்பவை CA, ABன் மையப்புள்ளிகள்.

வ.வ : BB^1, CC^1 இரண்டும் Gல் சந்திக்கட்டும்.
AGஐ சேர்த்து நீட்டுக.

AGன் நீட்டல் BCஐ A^1 என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

B வழியாக, $BG^1 \parallel CC^1$ வரைக.

BG^1 என்பது AGன் நீட்டலை G^1ல் சந்திக்கட்டும்.
CG^1ஐ சேர்த்து விடுக.

நி. வே : இப்போது A^1 என்பது BCன் மையம் எனவும்

$\frac{AG}{GA^1} = \frac{2}{1}$ எனவும் நிறுவவேண்டும்.

[A^1 என்பது BCன் மையப் புள்ளியென நிறுவி விட்டால், AA^1 ஒரு மையவெட்டியாகும். ஆகவே மையவெட்டிகள் BB^1, CC^1 வெட்டுமிடமாகிய G வழியாக மையவெட்டி AA^1ம் செல்கிறது என நிறுவப்படும். ஆகவே. மையவெட்டிகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவப்படும்].

தெ : $\frac{AC^1}{C^1B} = 1$ என நமக்கும் தெரியும் (சி. வி)

$GC^1 \parallel G^1B$ (வ. வ)

$\therefore \triangle ABG^1$ல் $GC^1 \parallel G^1B$

$\therefore \frac{AC^1}{C^1B} = \frac{AG}{GG^1}$

$\therefore \frac{AG}{GG^1} = 1$, அதாவது $AG = GG^1$. (1)

$\triangle AG^1C$ல்,

$\frac{AG}{GG^1} = 1$ [மேலே (1) காண்க]

மேலும் $\frac{AB^1}{B^1C} = 1$ [ஏனெனில் $AB^1 = B^1C$ (சி. வி)]

$\therefore \frac{AG}{GG^1} = \frac{AB^1}{B^1C}$

$\therefore B^1G \parallel CG^1$ (2)

∴ நாற்கரம் $BG\,CG^1$ல்,

$BG \parallel G^1C$ [மேலே (2) காண்க].

$CG \parallel BG^1$ (வ. வ)

∴ நாற்கரம் $BG\,CG^1$ ஒரு □ கரம்.

ஒரு □ கரத்தின் மூலை வரைகள் ஒன்றையொன்று சமகூறுகப் பிரிக்கின்றன.

$\therefore BA^1 = A^1C$

∴ A^1 என்பது BCன் மையம்

∴ AA^1 ஒரு மையவெட்டி.

இது மற்றிரண்டு மையவெட்டிகள் BB^1, CC^1 வெட்டிக்கொள்ளும் G வழியாகச் செல்கிறது என நிறுவப்படுகிறது.

∴ முக்கோணத்தின் மையவெட்டிகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவப்பட்டது.

இரண்டாவதாக,

□ கரத்தின் மூலை வரை GG^1ன் மையம் A^1.

$\therefore GA^1 = A^1G^1$.

$\therefore GA^1 = \frac{1}{2} GG^1$

ஆனல் $AG = GG^1$ [மேலே (1) காண்க]

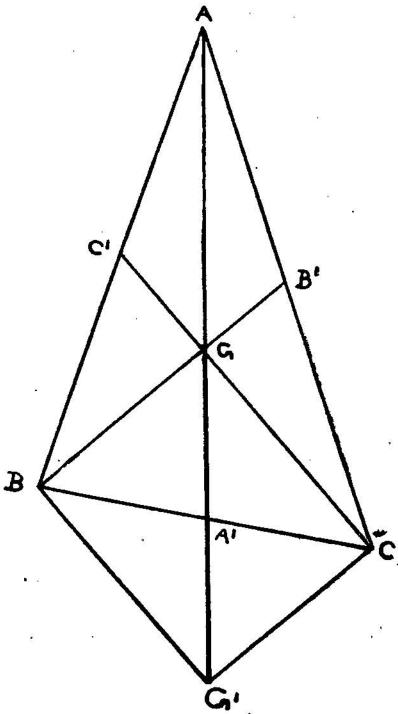
$\therefore GA^1 = \frac{1}{2} AG$

$$\therefore \frac{AG}{GA^1} = \frac{2}{1}$$

எனவே மைய வெட்டிகள் ஒன்றையொன்று தாம் வெட்டிக்கொள்ளுமிடத்தில், முச்சமக் கூறில் பிரித்துக்கொள்கின்றனவென நிறுவப்பட்டது.

செய்முறைப் பயிற்சி: ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று மைய வெட்டிகளின் நீளங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அம்முக்கோணத்தை வரையும் முறை முன் கண்ட தெரிப்பு முறையிலிருந்து பெறப்படும். ABC என்ற முக்கோணத்தின் மைய வெட்டிகள் $AA^1 = 7{\cdot}2$ செ.மீ, $BB^1 = 5{\cdot}4$ செ.மீ., $CC^1 = 6$ செ.மீ. எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. ABC என்ற முக்கோணம் வரையும் முறையைக் கூறுக.

வ. வழி: $BG = \frac{2}{3} BB^1 = 3{\cdot}6$ செ. மீ.
$CG = \frac{2}{3} CC^1 = 4{\cdot}0$ செ. மீ.
$AG = \frac{2}{3} AA^1 = 4{\cdot}8$ செ. மீ.



(படம் 56)

$BG^1 = 4{\cdot}0$ செ. மீ, $G^1G = 4{\cdot}8$ செ. மீ, $GB = 3{\cdot}6$ செ. மீ, கொண்ட $\triangle GBG^1$ என்ற ஒரு முக்கோணம் வரைக.

$BG^1\ CG$ என்ற இணைகரத்தை வரைக.

G^1Gஐ நீட்டி, $GA = G^1G = 4{\cdot}8$ செ. மீ, என்றபடி A என்ற புள்ளியைக் கொள்க.

AB, AC இரண்டையும் சேர்த்தால் நாம் வேண்டும் ABC என்ற முக்கோணம் கிடைக்கும்.

இங்கு, $AA^1 = AG + \frac{1}{2}AG$

$= 4{\cdot}8 + 2{\cdot}4$

$= 7{\cdot}2$ செ. மீ.

$BB^1 = BG + \frac{1}{2}BG$

$= 3{\cdot}6 + 1{\cdot}8$

$= 5{\cdot}4$ செ. மீ.

$CC^1 = CG + \frac{1}{2}CG$

$= 4 + 2$

$= 6{\cdot}0$ செ. மீ.

∴ ABC நாம் வேண்டும் முக்கோணமாகும்.

பயிற்சி 11

1. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்க அளவும், மற்றிரு பக்கங்களின்மேல் விழும் மையக்கோடுகளின் அளவுகளும் கொடுக்கப்பட்டால், அம்முக்கோணத்தை வரையும் முறை காண்க.

குறிப்பு : $BC = a$; $BB^1 = m_1$; $CC^1 = m_2$ என்ற நீளங்கள் கொண்டு முக்கோணம் வரைய வேண்டும்.

$BC = a$, $BG = \frac{2}{3}m_1$, $CG = \frac{2}{3}m_2$ எனப்பக்கங்கள் அளவுடைய BCG என்ற முக்கோணம் வரைக.

BCன் மையப்புள்ளி A^1ஐ Gஓடு இணைத்து, A^1Gஐ Aக்கு நீட்டி, $GA = 2GA^1$ என அமைக்க.

AB, AC என்ற கோடுகள் வரைய △ ABC கிடைக்கும்.

2. △ ABCன் மையக்கோட்டுச் சந்தி G.

AGஐ நீட்டி, AG=GP என்பதற்கொப்ப, P என்ற புள்ளி உண்டு. BGCP ஓர் இணைக்கரம் என நிறுவுக.

3. ஒரு முக்கோணத்தில், இரு பக்கத்தின் நீளங்களும், மூன்றும் பக்கத்தின்மேல் விழும் மையக்கோட்டின் நீளமும் கொடுக்கப்பட்டால், அம்முக்கோணம் வரையும் முறை காண்க.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் இருமையக் கோடுகள் சமமாயின், அது ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணமென நிறுவுக.

5. $\triangle ABC$ன் மையக்கோட்டுச் சந்தி G.
$\triangle GBC = \triangle GCA = \triangle GAB$ என நிறுவுக.

இதன் மறுதலை வகுத்து அதையும் நிறுவுக.

6. $\triangle ABC$ன் மையக்கோடுகள் AA^1, BB^1, CC^1. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

$$(1) \quad AA^1 > \frac{AB+AC}{2}$$

$$(2) \quad \tfrac{3}{4}(BC+CA+AB) < AA_1 + BB^1 + CC^1 < (BC+CA+AB)$$

இம்முடிவுகளைப் பொதுத்தேற்ற அமைப்பில் எழுதுக.

7 (*a*) சென்ற கணக்கில் $\triangle A^1B^1C^1$ன் மையக் கோடுகள் AA^1, BB^1, CC^1 ஓடு பொருந்தியிருக்கின்றன (Coincident) என நிறுவுக. இதையும் பொதுத் தேற்ற அமைப்பில் எழுதுக.

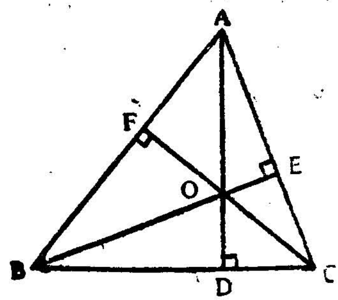
7 (*b*) AA^1ம் B^1C^1ம் P என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. CPம் ABம் Qல் சந்திக்கின்றன. $AB = 3\,AQ$ என நிறுவுக.

8. ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் நிலையிலும் (Position) அளவிலும் (length) குறிப்பிடப்பட்டிருக்கிறது. மேலும் அடிக்கோணம் (Base angle) ஒன்றும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இப்படிப்பட்ட முக்கோணங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்தி ஒரு நிலைத்த நேர்க்கோட்டில் இயங்குகிறது என நிறுவுக.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின்மேல், முக்கோணத்திற்கு எதிராகச் சமபக்க முக்கோணங்கள் வரையப்படுகின்றன. அம்முக்கோணங்களின் சுற்றுவட்ட மையங்கள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

தேற்றம் 15.

ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.



(படம் 57)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்

AD, BE, CF, உச்சிகளினின்று வரையப்படும் செங்கோடுகள்

D, E, F செங்கோடுகளின் பாதங்கள்

நி.வே: AD, BE, CF ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவவேண்டும்

தெ: ∴ $AD \perp BC$

$BD^2 = AB^2 - AD^2$

$DC^2 = AC^2 - AD^2$

$\therefore\ BD^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$

அவ்வாறே $EC^2 - EA^2 = BC^2 - BA^2$.

$AF^2 - FB^2 = CA^2 - CB^2$

∴ மூன்றையும் கூட்ட,

$$BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = AB^2 - AC^2 + BC^2 - BA^2 + CA^2 - CB^2$$
$$= 0$$

எனவே தேற்றம் 11 (a)ன் படி, D, E, F என்ற புள்ளிகளில் வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

∴ அதாவது, செங்கோடுகளான, AD, BE, CF மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என நிறுவப்பட்டது.

வரையறை: செங்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி, O செங்கோட்டு மையம் (ortho-centre) எனப்படும்.

பயிற்சி 12

1. △ ABCல் ∠A செங்கோணம். A என்பது செங்கோட்டுச் சந்தியென நிறுவுக.

2. ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தில், சுற்றுவட்ட மையம், செங்கோட்டுச் சந்தி, மையக்கோட்டுச் சந்தி, உள்தொடு வட்ட மையம் நான்கும் ஒரே புள்ளியில் ஒன்றியுள்ளனவென நிறுவுக.

3. △ ABCல், I, S, O என்பவை முறையே உள்தொடு வட்டமையம், சுற்று வட்ட மையம், செங்கோட்டு மையம். AI என்பது ∠ OASன் சமவெட்டியென நிறுவுக.

4. △ ABCன் பக்க மைய முக்கோணம் (Mid-point △) $A^1 B^1 C^1$. முதன் முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம், இரண்டாவது முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையமென நிறுவுக.

5. △ ABCன் உட்கோண சம வெட்டிகள், சுற்றுவட்டத்தை, P, Q, Rல் வெட்டுகின்றன. △ ABCன் உள்தொடு வட்ட மையம் △ PQRன் செங்கோட்டு மையமென நிறுவுக.

6. O வழியாகச் செல்லும் மூன்று சம ஆரமுடைய வட்டங்கள், மறுபடியும் ஒன்றையொன்று A, B, Cல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. O என்பது △ ABCன் செங்கோட்டு மையமென நிறுவுக.

7. செவ்வடி முக்கோணம் (Pedal triangle): △ ABCன் செங்கோடுகள், BC, CA, ABஐ முறையே D, E, Fல் சந்திக்கின்றன. △ DEF என்பது △ ABCன் செவ்வடி முக்கோணம் எனப் பெயர் பெறும். அதன் சில பண்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளை நிறுவுக.

(1) செவ்வடி முக்கோணத்தின் கோணங்கள், 180° – 2A, 180° – 2B; 180° – 2C;

2. உள் தொடு வட்டமையம், △ ABCன் செங்கோட்டு மையம் O;

3. வெளி தொடு வட்ட மையங்கள், A, B, C;

(4) △ OBC, △ OCA, △ OAB என்ற முக்கோணங்களின் செவ்வடி முக்கோணம் △ DEF;

(5) A, B, C என்ற இடங்களில் △ ABCன் சுற்று வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுவரைகள் செவ்வடி முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணைக் கோடுகள்;

(6) △ ABCன் வெளிதொடு வட்ட மையங்கள் I_1, I_2, I_3 ஆனல் △ $I_1 I_2 I_3$க்கு செவ்வடி முக்கோணம் △ ABC;

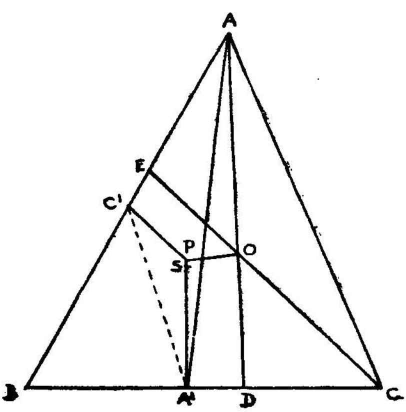
(7) △ $I_1 I_2 I_3$ன் செவ்வடி மையம் I (△ ABCன் உள் தொடு வட்ட மையம்.)

தேற்றம் 16

ஒரு முக்கோணத்தில், ஒரு உச்சியிலிருந்து, செங்கோட்டு மையதூரம், அவ்வுச்சிக்கு எதிர்ப்பக்கத்திலிருந்து சுற்று வட்ட மையம் வரையுள்ள தூரத்தைப்போல் இருமடங்காகும்.

மேலும், சுற்றுவட்ட மையம் (S), மையக்கோட்டுச் சந்தி (G), செங்கோட்டு மையம் (O) என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு வரைமை யுடையன. (ஒரே நேர்க்கோட்டிலிருக்கும்)

G என்ற புள்ளியில் SO முச்சமக்கூறில் பிரிக்கப்படுகிறது.



(படம் 58)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்

A^1, C^1 என்பவை BC, ABன் மையப் புள்ளிகள்

S சுற்று வட்டமையம்

AD, CE செங்கோடுகள்

O செங்கோட்டு மையம்

AA^1 ஒரு மையக்கோடு

AA^1ம் SOம் வெட்டுமிடம் P

நி. வே: (I) $AO = 2SA^1$ என நிறுவவேண்டும்

வ. வ: A^1, C^1ஐ இணைத்து விடுக

தெ: $\triangle$கள் SA^1C^1, OACல்,

$SA^1 \parallel AOD$ (இரண்டும் $\perp$ BC)

$SC^1 \parallel COE$ (இரண்டும் $\perp$ AB)

$A^1C^1 \parallel AC$ (A^1, C^1 என்பவை BC, ABன் மையப் புள்ளிகள்)

$\therefore \triangle SA^1C^1 \mathbin{|||} \triangle OAC$

$\therefore \dfrac{SA^1}{OA} = \dfrac{A^1C^1}{AC} = \frac{1}{2}$ [$A^1C^1 \parallel AC$; அதில் பாதி]

$\therefore \dfrac{SA^1}{AO} = \frac{1}{2}$

$\therefore AO = 2SA^1$ (நி. பட்டது).

நி. வே: (ii) P மையவெட்டிச் சந்தியெனவும்

$\dfrac{SP}{PO} = \frac{1}{2}$ எனவும் நிறுவவேண்டும்

தெ: $\triangle$கள் SPA^1, OPAல்

$SA^1 \parallel AO$ (இரண்டும் $\perp$ BC)

இவ்விணைக்கோடுகளை SO வெட்டுவதால்,

$\angle SA^1P = \angle OAP$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\angle SPA^1 = \angle OPA$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

$\therefore \triangle SPA^1 \mathbin{|||} \triangle OPA$

$$\therefore \frac{SP}{OP} = \frac{PA^1}{PA} - \frac{SA^1}{OA} = \frac{1}{2}$$ (முதல் நிறுவப்பட்டது)

$$\therefore \frac{PA^1}{PA} = \frac{1}{2}$$

ஆகவே, P, முக்கோணத்தின் மையவெட்டிச் சந்தியா கிறது.

எனவே, சுற்றுவட்ட மையம் S, மையவெட்டிச் சந்தி, P, செங்கோட்டு மையம் O மூன்றும் ஒரு வரைமையுடையன வென நிறுவப்பட்டது.

மேலும் $\frac{SP}{OP} = \frac{1}{2}$

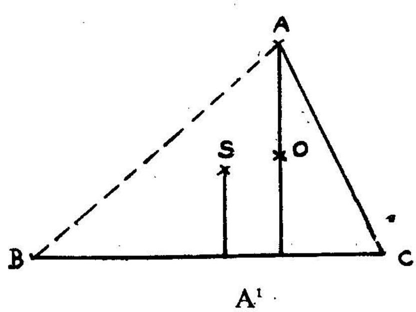
∴ P என்பது SOஐ முச் சமக்கூறில் பிரிக்கிறது.

(நி. பட்டது)

[குறிப்பு : இப்போது Pஐ முறைப்படி G எனக் கொள்க.]

பயிற்சி 12

1. O, S, Aன் நிலைகள் கொடுக்கப்பட்டால், அவைகளுக்குரிய △ABCன் வரைமுறை காண்க.



(படம் 59)

செய்முறை :

AOஐ இணைத்து நீட்டுக.

S வழியாக $SA^1 \parallel AO$ வரைக.

$SA^1 = \frac{1}{2}AO$ என்ற வகையில் A^1 என்ற புள்ளியை நிர்ணயிக்கவும்.

A^1 வழியாக, $BA^1C \perp SA^1$ வரைக. S மையங்கொண்டு, SA ஆரம்கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

அவ்வட்டம் BA^1Cஐ B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

வேண்டிய முக்கோணம் – $\triangle ABC$

தெரிப்பு: எளிதாம்.

2. I, I_1, I_2 என்ற புள்ளிகளின் நிலைகள் கொடுக்கப்பட்டால், அவைகளுக்குரிய $\triangle ABC$ வரை முறை காண்க.

3. $\triangle ABC$ல், $SA = OA$ ஆனல் $\angle C = 60^\circ$ என நிறுவுக.

4. $\triangle ABC$ல்,

$AO^2 + BC^2 = BO + CA^2 = CO^2 + AB^2 = 4R^2$ என நிறுவுக.

5. $\triangle$கள் BOC, COA, AOB, ABC என்ற யாவற்றிற்கும் சுற்று வட்ட ஆரங்கள் சமம் என நிறுவுக.

6. $a.OB.OC + b.\ OC.OA + c.OA{\cdot}OB = abc$ என நிறுவுக.

7. $\triangle ABC$க்குரிய O, S, A^1 என்ற புள்ளிகளின் நிலை கொடுக்கப்பட்டால், $\triangle ABC$ வரை முறை காண்க.

8. $\triangle ABC$ல், OAஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டம், சுற்று வட்டத்தை Pல் வெட்டுகிறது. A^1 வழியாக PO செல்லுமென நிறுவுக.

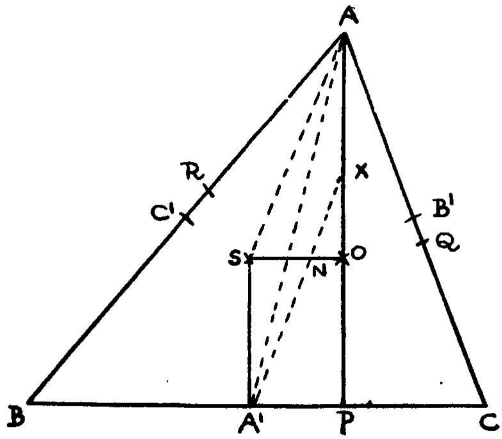
9. $\triangle ABC$ல் , $OL \perp AI$; $OM \perp AI_2$ வரையப்படுகின்றன. $LM \parallel AS$ என நிறுவுக ; மேலும் LMன் நீட்டல், A^1 வழியாகச் செல்லுகிறதென நிறுவுக.

தேற்றம் 17

ஒன்பது குற்று வட்டத் தேற்றம்

(Theorem of the Nine-point circle)

ஒரு முக்கோணத்தில், பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் மூன்றும், செவ்வடிகள் மூன்றும் செங்கோட்டு மையத்தோடு உச்சிகளை யிணைக்கும் கோடுகளின் மையப் புள்ளிகள் மூன்றும், ஆகிய ஒன்பது புள்ளிகளும் ஒரு வட்டத்தின்மேல் அமைகின்றன ; அவ்வட்ட மையம், சுற்று வட்ட மையத்தையும், செங்கோட்டு மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளியாகும் ; அவ் வட்டத்தின் ஆரம், சுற்று வட்ட ஆரத்தின் பாதியாகும்.



(படம் 60)

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம் ;

A^1, B^1, C^1 பக்கங்களின் மையங்கள் ;

P, Q, R, செங்கோடுகள் எதிர்ப் பக்கங்களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ;

S-சுற்று வட்ட மையம் ;

O-செங்கோட்டு மையம் ;

X-AOன் மையப் புள்ளி ;

Y, Z இரண்டும் BO, COன் மையப் புள்ளிகள் (படத்தில் காட்டப்படவில்லை.)

நி. வே: (i) A^1, B^1, C^1 : P, Q, R ; X, Y, Z என்ற ஒன்பது புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேலமையும் ;

(ii) அவ் வட்டத்தின் மையம் SOன் மையப் புள்ளி ;

(iii) அவ் வட்டத்தின் ஆரம் $= \frac{1}{2}$ SA (அதாவது SA என்ற சுற்று வட்ட ஆரத்தில் பாதி).

வ. வ : S, O என்ற புள்ளிகளை இணைக்கவும் ;

A^1, X என்ற புள்ளிகளையும், S, A என்ற புள்ளிகளையும் இணைக்கவும் ;

SO, A^1X என்ற கோடுகள் N என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

தெ : $AX = \frac{1}{2} AO$

$= SA^1$ (தேற்றம் 16)

$AX \parallel SA^1$ (இரண்டும் $\perp BC$)

$\therefore AXA^1S$ ஒரு □ கரம்

$A^1X = SA$ = சுற்று வட்டத்தின் ஆரம்

மேலும் $XO = \frac{1}{2} AO$

$= SA^1$

$XO \parallel SA^1$ (இரண்டும் $\perp BC$)

$\therefore XOA^1S$ ஒரு □ கரம்

இவ்விணைகரத்தின் மூலைவரைகள்,

SO, A^1X ஒன்றையொன்று இருசம பகுதிகளாக N என்ற புள்ளியில் பிரித்துக் கொள்ளுகின்றன.

$\therefore SN = NO$

இப்போது XA^1P ஒரு செங்கோண முக்கோணம். $\angle P = 90°$
$\therefore A^1X$ஐ ஒரு விட்டமாகக்கொண்டு, அதாவது A^1Xன் மையப்புள்ளி Nஐ மையமாகக்கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தால், அவ்வட்டம்,

X, P, A^1 என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்ட மையம் N, அதாவது SOன் மையப்புள்ளி.

அதன் ஆரம் $= \frac{1}{2} A^1X$

$= \frac{1}{2} SA$

= சுற்று வட்ட ஆரத்தில் பாதி.

எனவே, SOன் மையப் புள்ளியான Nஐ மையமாகக் கொண்டு, சுற்று வட்ட ஆரத்தை விட்டமாகக்கொண்டு, வரையப்படும் ஒரு வட்டமானது பின் கூறப்படும் மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கிறது :

(1) A^1 (ஒரு பக்க மையம்) ;

(2) P (ஒரு செவ்வடிப் பாதம்);

(3) X (ஒரு உச்சியையும் செங்கோட்டு மையத்தை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் மையப் புள்ளி).

அதேபோல் அவ்வட்டம்,

B^1, Q, Y வழியாகவும்

C^1, R, Z வழியாகவும்

செல்லும் என நிறுவலாம்.

எனவே, A^1, B^1, C^1; P, Q, R; X, Y, Z ஆகிய ஒன்பது புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேலமையும்; அதன் ஆரம் = $\frac{1}{2}$SA = சுற்று வட்ட ஆரத்தில் பாதி எனவும், அதன் மையம் SOன் மையப் புள்ளியெனவும் நிறுவப்பட்டது.

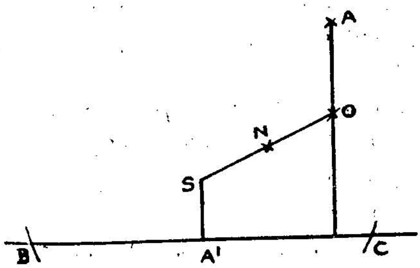
இவ் வட்டத்திற்கு, முக்கோணத்தின் ஒன்பது குற்று வட்டம் என்று பெயர். இப்பெயரைச் சுருக்கமாக ஒன்பான் வட்டம் எனப் பழக்கத்தில் கொண்டு வருவோம்.

பயிற்சி 13

1. A^1D, B^1E, C^1Fன் செங்குத்துச் சமவெட்டிகள், ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

2. $\triangle$ABCல் $\angle$A செங்கோணம். அதன் ஒன்பான் வட்டம், சுற்று வட்டத்தை Aல் தொடுகிறதென நிறுவுக.

3. $\triangle$ABC க்குரிய, N, O, A என்ற புள்ளிகளின் நிலை கொடுக்கப்பட்டால், அம் முக்கோணம் வரை காண்க.



(படம் 61)

சி. வி : N, O, Aன் நிலைகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

வரையவேண்டியது: இவைகளுக்குரிய முக்கோணம்.

வரைமுறை: ON சேர்த்து, NSக்கு நீட்டி,

NS = ONக் கொப்ப, Sஐ நிறுவுக.

அப்போது S, அம்முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையமாகும்.

S மையங் கொண்டு, SA ஆரமாக ஒரு வட்டம் வரைக. அது அம்முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம்.

S வழியாக $SA^1 \parallel AO$ வரைந்து, $SA^1 = \frac{1}{2}$ AO என்ற அளவில் A^1ஐ நிர்ணயிக்க.

A^1 வழியாக $BC \perp SA^1$ என ஒரு கோடு வரைக. அக்கோடு, சுற்று வட்டத்தை, B, Cல் வெட்டட்டும். △ABCதான் நாம் வேண்டிய முக்கோணம். தெரிப்பு எளிதானதால் விடப்பட்டது.

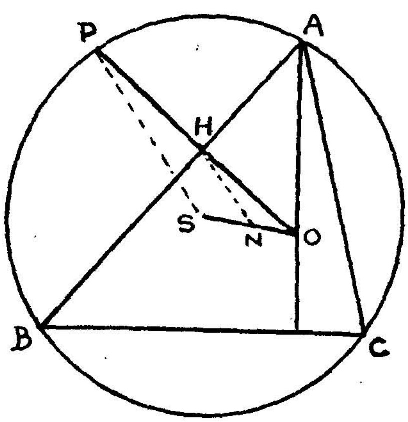
4. △ ABCன் உச்சிகள் வழியாக அதன் சுற்றுவட்டத்திற்கு AL, BM, CN என்ற விட்டங்கள் வரையப்பட்டிருக்கின்றன. OL, OM, ON என்பவை முறையே BC, CA, ABஐ சமக் கூறில் பிரிக்கின்றன வென நிறுவுக.

5. △ ABCன் சுற்றுவட்டமானது, △ $I_1 I_2 I_3$ன் ஒன்பான் வட்டமென நிறுவுக.

(குறிப்பு : △ $I_1 I_2 I_3$க் குரிய செவ்வடி முக்கோணம் △ ABC]

6. ஒரு முக்கோணத்தில் SN என்ற நீளம், G,O என்ற புள்ளிகளில் உள்ளும் வெளியும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றது என நிறுவுக. (குறிப்பு : S, G, N, O ஒரு இசைத் தொடர் வரிசையமைப்பு.) இக்கோடு △ ABCன் ஆய்லர் கோடு (Euler Line) எனக் கூறப்படும்.

7. △ ABCன் சுற்றுவட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதாமொரு புள்ளியோடு, செங்கோட்டு மையத்தை இணைக்கும் கோட்டின் மையப் புள்ளி, ஒன்பான் வட்டத்தின் மேலிருக்கிறதென நிறுவுக.



(படம் 62)

சி. வ : ABC ஒரு முக்கோணம்.
S, N, O முறையே சுற்றுவட்ட, ஒன்பான் வட்ட, செங்கோட்டு மையங்கள்.
P சுற்று வட்டத்தின்மேல் ஏதாமொரு புள்ளி. POன் மையப் புள்ளி H.

நி. வே : H என்பது ஒன்பான் வட்டத்தின் மேலிருக்கிறதென நிறுவவேண்டும்.

தெ : SOன் மையப் புள்ளி N
POன் மையப் புள்ளி H

$\therefore$ NH $= \frac{1}{2}$ SP
$= \frac{1}{2}$ R
= ஒன்பான் வட்டத்தின் ஆரம்.

$\therefore$ H என்பது அவ்வட்டத்தின் மேலிருக்கிறதென நிறுவப் பட்டது.

இதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில்,

"ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையத்தோடு சுற்றுவட்ட வரையின் மேலுள்ள புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகளின் மையப் புள்ளிகள், அம்முக்கோணத்தின் ஒன் பான் வட்டத்தின் மேலிருக்கின்றன;

அதாவது, அப்படியான புள்ளிகளின் இயங்கு வழி, அம் முக்கோணத்தின் ஒன்பான் வட்ட வரையாகும்."

8. △ ABCல், BC, CA, ABக்குப் பின்புறம் விழும் Sன் நிழல்கள் முறையே S_1, S_2, S_3 ஆனால், AS_1, BS_2, CS_3 என்ற மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

9. △ ABCல், AO, BO, COன் மையப்புள்ளிகள் X, Y, Z. A^1X, B^1Y, C^1Z என்ற மூன்று கோடுகளும் ஒன்பான் வட்ட மையத்தில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

10. ஒரு முக்கோணத்தில், அடிப்பக்க நீளமும், உச்சக் கோண அளவும் கொடுக்கப்பட்டால், அம்முக்கோணத்தின் ஒன்பான் வட்ட மையத்தின் இயங்கு வழி யறிக.

11. முன் கணக்கில், அவ்வாறான ஒன்பான் வட்டங்கள், ஒரு நிலைத்த வட்டத்தைத் தொடுகின்றவென நிறுவுக.

12. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒன்பான் வட்ட மையமும் (1) செங்கோட்டு மையமும், முக்கோணத்தின் ஏதாமொரு உச்சியும் ;

(2) ஏதாமிரு உச்சிகளும் கொடுக்கப்பட்டால், அம்முக்கோணத்தை வரையும் முறை காண்க.

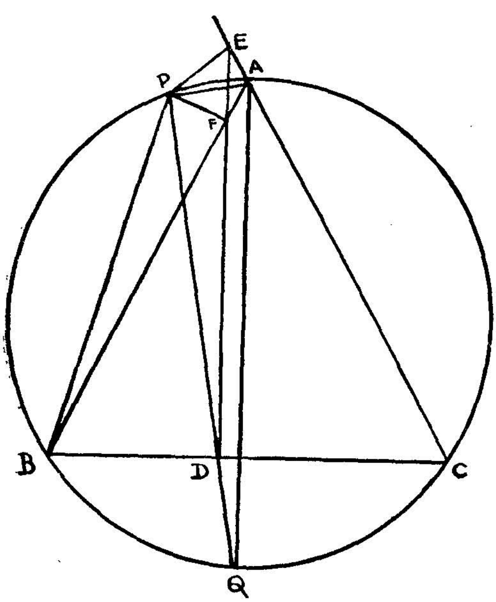
13. ஒரு முக்கோணத்தின் I, I_1, I_2, I_3 என்ற நான்கு புள்ளிகளில் மூன்று மூன்றாக எடுத்து இணைப்பதால் பெறப்படும் முக்கோணங்களின் ஆய்லர் கோடுகள் (6ம் கணக்கு பார்க்க) சுற்று வட்ட மையத்தில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

14. △ ABCன் சுற்றுவட்டத்திற்கு Aன் வழியாக வரையப்படும் தொடு வரையும், ஒன்பான் வட்டத்திற்கு A'ன் வழியாக வரையப்படும் தொடு வரையும், இணைக்கோடுகளென நிறுவுக.

தேற்றம் 18

(சிம்ஸன் கோட்டுத் தேற்றம்)

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில் ஏதாமொரு புள்ளியிலிருந்து, முக்கோணப் பக்கங்களுக்குக் குத்துக்கோடுகள் வரைந்தால், அக்குத்துக்கோடுகள் அப்பக்கங்களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒரு வரைமையுடையன. (அதாவது அப்புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும்).



(படம் 63)

சி. வி : ABC ஒரு முக்கோணம்.

அதன் சுற்று வட்டத்தின்மேல் P ஒரு புள்ளி. PD, PE, PF என்பவை முறையே, BC, CA, ABன் மேல் குத்துக்கோடுகள்.

நி. வே : D, E, F மூன்றும் ஒரு வரைமையுடையன என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ : P, B; P, A; D, F; F, E; இவற்றை இணைக்கவும்.

தெ : $\therefore \angle BDP = 90° = \angle BFP$ ($PD \perp BC$; $PF \perp BA$)

BDFP ஒரு வட்ட நாற்கரமாகிறது (1)

மேலும், PBCA ஒரு வட்ட நாற்கரம் (2)

மற்றும், PFAE ஒரு வட்ட நாற்கரம் (3)

($PE \perp CE$; $PF \perp BA$)

$\therefore$ (1)ன் காரணமாக,

$\angle PFD = 180° - \angle PBD$

$= 180° - \angle PBC$

$= 180° - \angle PAE$ [(2)ன் காரணமாக]

$= 180° - \angle PFE$ [(3)ன் காரணமாக; ஒரு வட்டத் துண்டின் மேலிருக்கும் கோணங்கள் சமம்.]

$\therefore \angle PFD + \angle PFE = 180°$

$\therefore$ DF, FE ஒரே நேர்க் கோட்டிலமைகின்றன.

அதாவது D, E, F மூன்றும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவப்பட்டது.

மற்றொரு வகையில் தெரிப்பு

இப்போது, DF, DE இணைத்து, அவ்விரு கோடுகளும் மற்றோர் கோட்டிற்கு இணைக்கோடுகள் என நிறுவி விட்டால், DF, DE ஒரே கோடாகும் என நிறுவப்பட்டு விடும்.

வ. வ : PDஐ நீட்டி, அந் நீட்டல், சுற்று வட்டத்தை Q என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

A, Q இணைத்து விடுக.

தெ: PAQB, PBDF, PQCA, PDCE யாவும் வட்ட நாற்கரங்கள் என எளிதில் நிறுவலாம்.

ஆகவே $\angle AQP = \angle ABP$ (PA என்ற வட்டத் துண்டின் மேலுள்ளன)

$= \angle FBP$

$= \angle FDP$ (PF என்ற வட்டத் துண்டின் மேலுள்ளன)

$\therefore \angle AQP = \angle FDP$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\therefore QA \parallel DF$

மேலும், $\angle AQP = \angle ABP$

$= \angle ACP$ (ஒரே வட்டத்துண்டின் மேலுள்ளன)

$= \angle ECP$

$= \angle EDP$ (PE என்ற வட்டத் துண்டின் மேலுள்ளன)

$\therefore \angle AQP = \angle EDP$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\therefore QA \parallel DE$

எனவே, DF, DE என்ற இரு கோடுகளும் QAக்கு இணைக் கோடுகள்.

$\therefore$ DE, DF, ஒரே கோடு, (பிளேபேர் வெளிப்படை உண்மை). என நிறுவப்பட்டது.

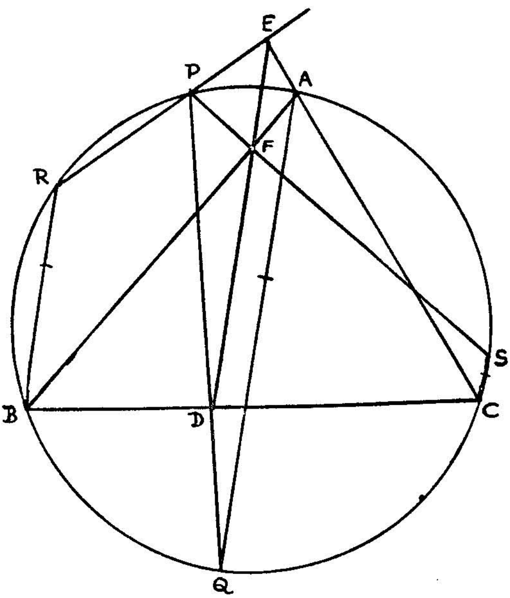
குறிப்பு: இவ்வழித் தெரிப்பின் முடிவு யாதெனின்,
(1) PDன் நீட்டல், சுற்றுவட்டத்தை Qல் சந்திக்குமாயின், $QA \parallel DFE$;

(2) அவ்வாறே, PEயின் நீட்டல், சுற்றுவட்டத்தை Rல் சந்திக்குமாயின், $BR \parallel DFE$;

(3) அவ்வாறே, PFன் நீட்டல், சுற்றுவட்டத்தை Rல் சந்திக்குமாயின் $CS \parallel DFE$.

7

பின்வரும் படம் பார்க்க.



(படம் 64)

வரையறை : DFE என்ற கோடு, P என்ற புள்ளிக்குரிய சிம்ஸன் கோடு அல்லது செவ்வடியாயக் கோடு (Pedal line of P) எனப்படும்.

P ன் சிம்ஸன் கோடான DFE ∥ AQ;

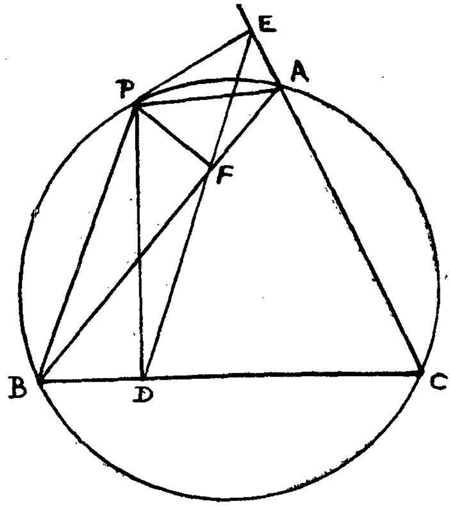
∥ BR;

∥ CS; என்ற முடிவு பல இடங்களில் பயன்படும்.

தேற்றம் 18 (a)

சிம்ஸன் கோட்டுத் தேற்றத்தின் மறுதலை

ஏதாமொரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் (feet of the perpendiculars) ஒரு வரைமையுடையதாயின், முதற் கூறிய புள்ளி அம் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் மேலிருக்கும்.



(படம் 65)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்.
P ஏதாமொரு புள்ளி.
P லிருந்து BC, CA, ABக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் முறையே D, E, F.
D, E, F மூன்றும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன.

நி. வே: P என்ற புள்ளி △ ABCன் சுற்று வட்டத்தின் மேலுள்ளது என நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ: PB, PA இணைக்கப்படட்டும்.
PFDB, PEAF என்பவை வட்ட நாற்கரங்கள் என நிறுவுவது எளிதாம்.

$\therefore \angle$ PBC $= \angle$ PBD

$= 180° - \angle$ PFD ($\because$ PFDB ஒரு நாற்கரம்)

$= \angle$ PFE ($\because$ DFE ஒரு நேர்க்கோடு)

$= \angle$ PAE ($\because$ PE என்ற வட்டத்துண்டின் மேலுள்ள கோணங்கள்)

$= 180° - \angle$ PAC ($\because$ CEA ஒரு நேர்க்கோடு)

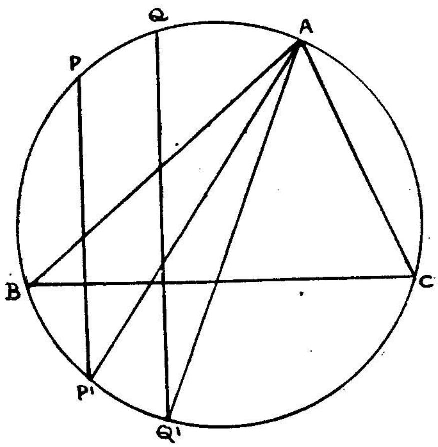
$\therefore \angle PBC + \angle PAC = 180^\circ$

$\therefore$ P, A, C, B ஒரு வட்ட மேற் புள்ளிகள்.

$\therefore$ P என்ற புள்ளி, $\triangle$ABCன் சுற்று வட்டத்தின் மேலுள்ளது என நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 14

1. P, Q என்பவை, $\triangle$ABCன் சுற்றுவட்டத்தின் மேல் இரண்டு புள்ளிகள். P, Qன் செவ்வடியாயக் கோடுகளிடையுள்ள கோணம், PQ என்ற வட்டத் துண்டின்மேல் அமையும் கோணத்திற்குச் சமம் என நிறுவுக.



(படம் 66)

சி. வி: $\triangle$ABCன் சுற்று வட்டத்தின்மேல் P, Q இரண்டு புள்ளிகள்.

நி. வே: P, Qன் செவ்வடியாயக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம், PQ என்ற வட்டத்துண்டின்மேல் அமையும் கோணத்திற்குச் சமமென நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ: P, Qவிலிருந்து BCன் மேல் வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள், சுற்று வட்டத்தை, P^1, Q^1 என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்.

AP^1, AQ^1ஐ இணைக்கவும்.

தெ : வட்டப்பகுதி P^1Q^1 = வட்டப்பகுதி PQ
ஏனெனில் $PP^1 \perp B \perp CQQ^1$. ஆகவே $PP^1 \parallel QQ^1$

∴ P^1Q^1ன்மேல் நிற்கும் எக்கோணமும்,
PQன்மேல் நிற்கும் எக்கோணத்திற்கும் சமமாகும்.

∴ $\angle P^1AQ^1$, PQ என்ற வட்டப்பகுதியின்மேல் நிற்கும் எக்கோணத்திற்கும் சமம். (A)

ஆனல் $AP^1 \parallel$ Pன் செவ்வடியாயக் கோடு ;

அவ்வாறே $AQ^1 \parallel$ Qன் செவ்வடியாயக் கோடு.

∴ $\angle P^1AQ^1$, P,Qன் செவ்வடியாயக் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமம்.

எனவே (A)ன் முடிவுபடி, தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

[குறிப்பு: இம்முடிவை, தேற்றம் 18க்குக் கிளைத்தேற்றமாகவும் கொள்ளலாம். மிக முக்கியமானது]

2. △ABCல் Aன் செவ்வடியாயக் கோடு, Aலிருந்து BCக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு என நிறுவுக.

3. △ ABCல், Pன் செவ்வடியாயக் கோடு, A வழியாக உள்ள சுற்று வட்ட விட்டத்திற்கு இணைக்கோடாகுமானல், AP ∥ BC என நிறுவுக.

4. △ BACன் சுற்று வட்டத்தின்மேல் P, Q, R மூன்று புள்ளிகள். P, Q, Rன் செவ்வடியாயக் கோடுகளால் அமையும் முக்கோணம், △ PQRக்கு வடிவொத்ததென நிறுவுக.

மேலும், Pன் செவ்வடியாயக் கோடு QRக்கு இணைக் கோடாயிருப்பின், Q,Rன் செவ்வடியாயக் கோடுகள், முறையே, PR, PQக்கு இணைக்கோடுகளாயமையும் என நிறுவுக.

5. ஒரு முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்களின் போக்குகள் (directions) கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. மூன்ரும் பக்கத்தின் ஒரு புள்ளியும், சுற்றுவட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டால், அம்முக்கோணத்தை வரையும் முறை காண்க.

சி. வி : AB, ACன் நிலைகள் அல்லது போக்குகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. BCன் மேலுள்ள D என்ற புள்ளியும், சுற்று வட்டத்தின் மேலுள்ள P என்ற புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

வ. வ : PZ⊥ABம், PY⊥CAம் வரைக. அவை முறையே AB, ACஐ Z, Yல் சந்திக்கட்டும்.

Y, Z இணைத்து நீட்டுக.

D வழியாக YZக்கு குத்துக் கோடு வரைக. அக்குத்துக் கோடு, AB, ACஐ முறையே, B, C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்.

△ ABC தான் குறிப்பிட்ட முக்கோணமாகும். தெரிப்பு எளிதாம்.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில், ஒரு விட்டத்தின் முனைகள் P, Q. அம்முனைகளின் செவ்வடியாயக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தென நிறுவுக.

7. △ ABCன் சுற்றுவட்டத்தின்மேல் P ஒரு புள்ளி. அதன் செவ்வடியாயக் கோடு, பின்வரும் பண்புடைத்தாயின் Pன் நிலையைக் காண்க.

(1) APக்கு இணைக்கோடு ; (விடை : BCக்குச் செங்குத்தான தொடுவரை தொடும் புள்ளி.)

(2) APக்குச் செங்குத்தானது ; (விடை : BCக்குச் செங்குத்தான விட்டம் வெட்டும் புள்ளி.)

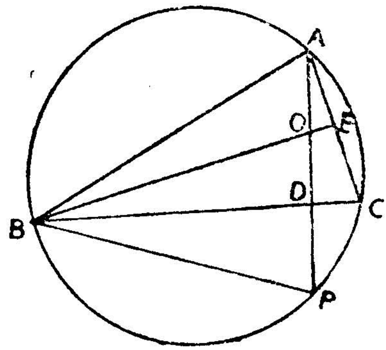
(3) A என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுவரைக்கு இணைக்கோடு.

8. ABCD என்ற ஒரு வட்ட சரிவகத்தில் AB ∥ CD. P வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. Pயிலிருந்து, AC, AD, BC, BDக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பாதங்கள் ஒரு வட்டத்திலமையுமென நிறுவுக.

முக்கிய பயிற்சி

ABC என்ற முக்கோணத்தின் செங்கோட்டுச் சந்தி O. Aயிலிருந்து BCன் மேல் வரையப்படும் குத்துக்கோடான AD, நீட்டப்பட்டு, முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தை P-ல் சந்திக்கிறது.

OD = DP என நிறுவுக.



(படம் 67)

சி. வி: △ABCன் இரு செங்குத்துக் கோடுகள் AD, BE O என்ற செங்கோட்டு மையத்தை நிலைப்படுத்துகின்றன.

ADன் நீட்டல், சுற்று வட்டத்தை P-ல் சந்திக்கிறது.

நி. வே: OD = DP என நிறுவவேண்டும்.

வ. வ: B, P இணைக்கவும்.

தெ: $\angle ODB = 90° = \angle PDB$

வட்ட நாற்கரமான OECDல்,

வெளிக்கோணம் BOD = உள்ளெதிர் கோணம் DCE

$= \angle BCA$

$= BPA$ (ஒரே வட்டத் துண்டின் மேல்)

$= \angle BPD$

∴ △கள் ODB, PDBல்,

$\angle ODB = \angle PDB$
$\angle BOD = \angle BPD$
BD பொது

∴ $ODB \equiv \triangle PDB$ (இருகோணம்–ஒத்த பக்கம்)

∴ $OD = PD$ என நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 15

1. △ ABCல் AD என்ற செங்குத்துக்கோடு, சுற்று வட்டத்தை Pல் சந்திக்கிறது. $AB = AC$ ஆனல், OBPC ஒரு சாய் சதுரமென நிறுவுக.

2. △ ABCன் செங்கோட்டு மையம் O. AD, BE, CF என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் நீட்டப்பட்டு, $OD = DX$, $OE = EY$, $OF = FZ$ என்றதற்கொப்ப, X, Y, Z என்ற புள்ளிகள் குறிக்கப்படுகின்றன. X, Y, Z மூன்றும் △ ABCன் சுற்று வட்டத்தின் மேல் அமையுமென நிறுவுக. மேலும் $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$ என நிறுவுக.

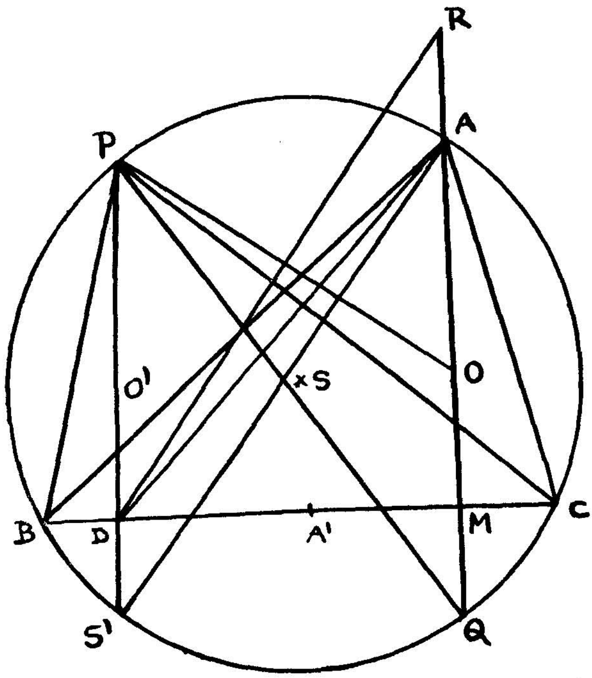
3. △ ABCன் இரு செங்கோடுகள் BE, CF, சுற்று வட்டத்தை Q, Rல் சந்திக்கின்றன. △ OQRன் சுற்றுவட்ட மையம் A என நிறுவுக.

4. ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம். △ ABC, △ ABDன் செங்கோட்டு மையங்கள் H_1, H_2. A, B, H_1, H_2 என்பவை ஒரு வட்டத்தின் மேலமையுமென நிறுவுக.

5. △ ABCன் வெளிதொடு வட்டமையங்கள் I_1, I_2, I_3; I உள்ளதொடு வட்ட மையம். △ $I_1 I_2 I_3$ ன் சுற்று வட்ட மையம் AIஐ Dல் வெட்டுகிறது. $AI = AD$ எனவும், $II_2 = I_2 D$ எனவும் நிறுவுக.

முக்கிய பயிற்சி

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் மேலுள்ள P என்ற புள்ளிக்குரிய செவ்வடியாயக் கோடு, Pஐயும் செங்கோட்டு மையத்தையும் (O) இணைக்கும் தூரத்தை இருசம பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.



(படம் 68)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்.
Pன் செவ்வடியாயக் கோடு DR.
O – செங்கோட்டு மையம்.
S – சுற்றுவட்ட மையம்.
A' – BCன் மையம்.

நி. வே: OPஐ DR இருசம பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறதென நிறுவ வேண்டும்.

வ. வ: PB, PCஐ இணைக்கவும்.

PDன் நீட்டல் சுற்று வட்டத்தை S^1ல் சந்திக்கட்டும்.

S^1Aஐ இணைக்கவும்.

△ PBCன் செங்கோட்டுச் சந்தி O^1ஐ இடங் குறிக்கவும்.

AOஐ நீட்டி, சுற்று வட்டத்தை Qல் சந்திக்கச் செய்யவும்.

செவ்வடியாயக் கோடாகிய DR, OAன் நீட்டலை Rல் சந்திக்கட்டும்.

தெ: △ABC, △PBC இரண்டிற்கும் சுற்றுவட்ட மையம் அதாவது S, பொது; BC என்ற பக்கமும் பொது.

$\therefore 2SA^1 = AO = PO^1$

மேலும் $\left.\begin{array}{l} OM = MQ \\ OD = DS^1 \end{array}\right\}$ தேற்றம் 19

$DS^1 \parallel AR$ (இரண்டும் $\perp$ BC)

மேலும் $DR \parallel S^1A$ (சிம்ஸன் கோட்டுப் பண்பு)

$\therefore DRAS^1$ ஒரு □ கரம்

$\therefore DS^1 = RA$

$\therefore RA + AO = DS^1 + PO^1 \quad (\because AO = PO^1)$

$= O^1D + PO^1 \quad (\because DS^1 = O^1D)$

$\therefore RO = PD$

மேலும் $RO \parallel PD$ (இரண்டும் $\perp$ BC)

$\therefore$ PROD ஒரு □ கரம்

அதன் மூலை வரைகளான, DRம் POம் ஒன்றையொன்று இரு சம பகுதிகளாக வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன.

ஆகவே Pன் செவ்வடியாயக் கோடான DR என்ற கோடு, POஐ இரு சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கிறதென நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 16

1. P என்பது △ ABCன் சுற்றுவட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி ; O செங்கோட்டு மையம். OPன் மையம் வழியாக ஒன்பான் வட்டம் செல்கிறதென நிறுவுக.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட விட்டத்தின் முனைப் புள்ளிகளுக்குரிய செவ்வடியாயக் கோடுகள், அம் முக்கோணத்தின் ஒன்பான் வட்டத்தின்மேல் சந்திக்கின்றன வென நிறுவுக. அக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று குத்துக் கோடுகளென நிறுவுக.

3. நான்கு நேர்க்கோடுகள் வெட்டுங்கால் ஏற்படும் நான்கு முக்கோணங்களின் செங்கோட்டு மையங்கள் ஒருவரைமையுடையனவென நிறுவுக.

4. △ ABCல் BCக்கு இணைக்கோடாக PQ என்ற சுற்றுவட்ட விட்டம் வரையப்படுகிறது. O செங்கோட்டு மையமானல், Pன் செவ்வடியாயக் கோடு AOஐ இரு சமக் கூறில் பிரிக்கிறதென நிறுவுக.

5. சென்ற கணக்கில், AD ஒரு செங்கோடு எனின், P, Qன் செவ்வடியாயக் கோடுகள் ADன் மேல் சந்திக்கின்றன வென நிறுவுக.

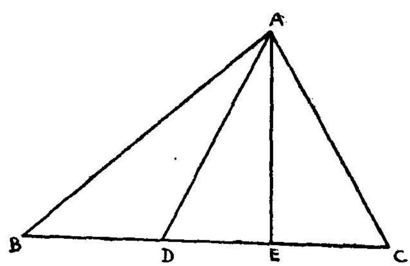
தேற்றம் 19

அப்பலோனியஸ் தேற்றம்

(Apollonius Theorem)

ABC என்ற முக்கோணத்தில், D என்பது BCன் மேல் $m.BD = n.DC$ என்பதற்கொத்த ஒரு புள்ளி. அப்போது,

$m.AB^2 + n.AC^2 = (m+n)AD^2 + m.BD^2 + n.DC^2$ என நிறுவுக.



(படம் 69)

சி. வி: ABC ஒரு முக்கோணம்.
BCல் D ஒரு புள்ளி.
$m.\ BD = n.DC$ என்ற சமன்பாடு பொருந்தும்.

நி. வே: $m.\ AB^2 + n.AC^2 = (m+n)\ AD^2 + m.BD^2 + n.DC^2$

வ. வ: Aலிருந்து, AE என்ற குத்துக்கோடு வரைக.

நெ: △கள் ABE, ACE, ADE யாவும் செங்கோண முக்கோணங்கள்.

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 &= AE^2 + BE^2 \\ &= AE^2 + (BD+DE)^2 \\ &= AE^2 + BD^2 + DE^2 + 2\ BD.DE \\ &= AD^2 + BD^2 + 2\ BD.DE \end{aligned}$$

$$\therefore m.\ AB^2 = m.\ AD^2 + m.\ BD^2 + 2\ m.\ BD.\ DE \qquad (1)$$

அவ்வாறே

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + CE^2 \\ &= AE^2 + (DC - DE)^2 \\ &= AE^2 + DC^2 + DE^2 - 2\ DC.\ DE \\ &= AD^2 + DC^2 - 2\ DC.\ DE \end{aligned}$$

$$\therefore n \cdot AC^2 = n\ AD^2 + n \cdot DC^2 - 2\ n \cdot DC \cdot DE \qquad (2)$$

(1)+(2) கொடுப்பது,

$$\begin{aligned} m \cdot AB^2 + n.\ AC^2 &= (m+n)\ AD^2 + m.\ BD^2 + n.\ DC^2 + 2\ DE(m.\ BD - n.\ DC.) \\ &= (m+n)\ AD^2 + m.\ BD^2 + nDC^2 \quad (\text{ஏனெனில் } m.BD = n.DC) \end{aligned}$$

இத் தேற்றத்தை மற்றும் வேறுவிதங்களிலும் தகுந்தபடி மாற்றிக் கூறலாம்.

(1) $BD = \frac{1}{n}\ BC$ எனக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} (n-1)\ AB^2 + AC^2 &= n \cdot AD^2 + \frac{n-1}{n}\ BC^2 \\ &= n \cdot AD^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) BC^2 \end{aligned}$$

(2) $m=n$ ஆனல், $BD=DC$; அப்போது D என்பது BCன் மையப்புள்ளி.

அப்போது,

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$$
$$=2AD^2+\tfrac{1}{2}BC^2$$

(3) AA^1, BB^1, CC^1 மைய வெட்டிகளானல்,

$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2{AA^1}^2$$

$$c^2+a^2=\frac{b^2}{2}+2{BB^1}^2$$

$$a^2+b^2=\frac{c^2}{2}+2{CC^1}^2$$

$$\therefore\ {AA^1}^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$\therefore\ {AA^1}^2+{BB^1}^2+{CC^1}^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

அதாவது 4 (மையவெட்டிகளின் இருபடிக் கூட்டு)
= 3 (பக்கங்களின் இருபடிக் கூட்டு)

மேலும் G என்பது மையவெட்டிச் சந்தியானல்,

$$GA=\tfrac{2}{3}AA^1$$

$$\therefore\ \tfrac{4}{9}{AA^1}^2=GA^2$$

$$GA^2+GB^2+GC^2=\tfrac{4}{9}({AA^1}^2+{BB^1}^2+{CC^1}^2)$$
$$=\tfrac{3}{4}\times\tfrac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

(4) $$m\cdot AB^2+n\cdot AC^2=(m+n)AD^2+\frac{mn}{m+n}BC^2$$

ஏனெனில்,

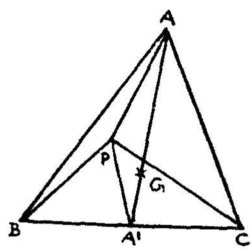
$$m\cdot BD^2+n\cdot DC^2=m\left(\frac{n}{m+n}\right)^2BC^2+n\left(\frac{m}{m+n}\right)^2BC^2$$
$$=BC^2\frac{mn(m+n)}{(m+n)^2}$$
$$=BC^2.\frac{mn}{m+n}$$

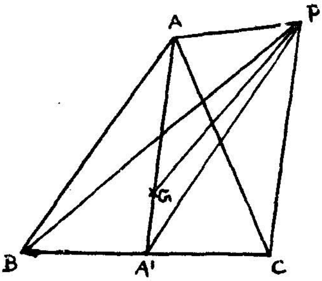
முக்கியமான பயிற்சிக் கணக்கு :

ABC ஒரு முக்கோணம். அதே மட்டத்தில் P ஏதாமொரு புள்ளி ; G மையக்கோட்டு சந்தி.

அப்போது,

$$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$$
$$=\tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3PG^2 \text{ என நிறுவுக.}$$





(படம் 70)

சி. வி : △ ABCல் AA^1 ஒரு மையக்கோடு ;
G மையக்கோட்டுச் சந்தி ;

P ஏதாமொரு புள்ளி (முக்கோணத்திற்கு உள்ளே, அல்லது வெளியே)

தெ : △ PBCல்

$$PB^2+PC^2=2PA^{1^2}+2BA^{1^2}$$

$$\therefore\ PA^2+PB^2+PC^2=(PA^2+2PA^{1^2})+2BA^{1^2}$$

△ PAA^1ல், $2A^1G=GA$

$$\therefore\ 2PA^{1^2}+1\cdot PA^2=(2+1)PG^2+2GA^{1^2}+1\cdot GA^2 \text{(தேற்றம் 19)}$$
$$=3PG^2+2GA^{1^2}+GA^2$$

$$\therefore\ PA^2+PB^2+PC^2=3PG^2+2GA^{1^2}+2BA^{1^2} \quad (1)$$

△ GBCல்,

$$GB^2+GC^2=2GA^{1^2}+2BA^{1^2} \quad (2)$$

(1)ல் வலதுகைப்புறத்தில் தோன்றும்,

$(2GA'^2 + 2BA'^2)$க்கு (GB^2+GC^2) ஈடுசெய்ய,

$PA^2+PB^2+PC^2 = 3PG^2+GA^2+GB^2+GC^2$
$= 3PG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+{}^2c)$ (முன்னர் நிறுவப் பட்டது.)

பயிற்சி 17

1. ஒரு இணைக்கரத்தின் மூலை விட்டங்களின் இருபடிக் கூட்டுத் தொகை, அவ்விணைக்கரத்தின் நான்கு பக்கங்களின் இருபடிக் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமென நிறுவுக.

2. ABC ஒரு முக்கோணம்; p, q, r மூன்று மாறிலிக் கூட்டெண்கள்; $p{\cdot}PA^2+q{\cdot}PB^2+r{\cdot}PC^2 =$ மாறிலி k^2 என்ற சமன்பாட்டுக் கொப்ப, P என்ற புள்ளி இயங்குமானல், Pன் இயங்குவழி ஒரு வட்டமென நிறுவுக.

3. $\triangle ABC$ல், $\angle A$ன் உள் மையவெட்டி, எதிர்ப்பக்கத்தை D-ல் சந்திக்கிறது. அப்போது,

$$AD^2 = \frac{4bc\, s\,(s-a)}{(b+c)^2}$$ என நிறுவுக.

($a+b+c=2\,s$ எனக் கொள்க).

$b=12,\ c=5,\ a=13$ ஆனல் ADன் நீளமென்ன?

4. $\triangle ABC$ல் BC என்ற பக்கத்தில் $BD : DC = 5 : 4$ என்ற விகிதத்தில் D என்ற ஒரு புள்ளி குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. சுற்று வட்டத்தை AD என்பது E-ல் சந்திக்கிறது. $4AB^2+5AC^2=9AD{\cdot}AE$ என நிறுவுக.

5. $\triangle ABC$ ஒரு சமபக்க முக்கோணம். அதன் சுற்று வட்டத்தின்மேல் P ஒரு புள்ளி; S சுற்று வட்டத்தின் மையம். $PA^2+PB^2+PC^2=6\,SA^2$ என நிறுவுக.

6. $\triangle ABC$ன் உள் வட்ட மையம் I. P ஏதாமொரு புள்ளியாயின்,

$a.\,PA^2 + b{\cdot}\,PB^2 + c.\ PC^2 = a{\cdot}AI^2 + b{\cdot}BI^2 + c.\ CI^2 + (a+b+c)\,PI^2$ என நிறுவுக.

7. $\triangle ABC$ல் AD ஒரு மையக்கோடு. AD சுற்றுவட்டத்தை E–ல் சந்திக்கிறது. $AB^2+AC^2=2AD \cdot AE$ என நிறுவுக.

8. முதல் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட தேற்றத்தின் மறுதலையை யெழுதி நிறுவுக.

9. நாலாவது கணக்கில் $BD : DC = m : n$ என்ற விகிதத்தில் கொண்டு, பொது முடிவு காண்க.

அனுபந்தம்

தேற்றங்களின் ஆங்கில மொழிபெயர்ப்பு

(Theorems Stated in English)

1. A given straight line can be divided internally or externally in a given ratio at one and only one point.

2. A straight line drawn parallel to one side of a triangle cuts the other two sides or those sides produced proportionally.

2. (a) If a straight line cuts two sides of a triangle proportionally, then the straight line is parallel to the third side. (Converse of Theorem 2)

3. If the vertical angle of a triangle is bisected internally or externally, the bisector divides the base internally or externally into segments which have the ratio as the other two sides of the triangle.

3. (a) If a straight line drawn from a vertex of a triangle divides the opposite side internally or externally in the ratio of the other two sides, that straight line bisects that angle internally or externally. (Converse of Theorem 3)

4. If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional.

4. (a) If two triangles have three sides of the one proportional to the three sides of the other, taken in order, the triangles are equiangular. (Converse of Theorem 4)

5. If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other, and the sides about these equal angles proportional, the triangles are similar.

6. The perpendicular from the right-angled vertex of a right angled triangle meeting the hypoteneuse divides the triangle into two triangles which are similar to each other and similar to the original triangle.

7. Areas of triangles and parallelograms of equal altitudes are to one another as their bases.

8. The areas of similar triangles are proportional to the squares on the corresponding sides.

9. The areas of similar polygons are proportional to the squares on the corresponding sides.

10. Ptolemy's Theorem: In a cyclic quadrilateral, the sum of the rectangles contained by pairs of opposite sides is equal to the rectangle contained by the diagonals.

11. If X, Y, Z are points in the sides BC, CA, AB respectively of a triangle ABC, such that the perpendiculars to the sides at these points are concurrent, then $BX^2-XC^2+CY^2-YA^2+AZ^2-ZB^2=0$.

11 (a) If X, Y, Z are points in the sides BC, CA, AB respectively of a triangle ABC, such that $BX^2-XC^2+CY^2-YA^2+AZ^2-ZB^2=0$, then the perpendiculars at these points are concurrent. (converse of Theorem 11)

12. Menelaus' Theorem: If a transversal DEF cuts the sides BC, CA, AB of a triangle at D, E, F respectively, $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$.

12 (a) If D, E, F are points on the sides BC, CA, AB of a triangle ABC such that $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$, then D, E, F are collinear. (converse of Theorem 12)

13. Ceva's Theorem: If the lines joining any point O to the vertices A, B, C of a triangle ABC, meets the opposite sides in D, E, F, then $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=+1$

13. (a) If D, E, F are points on the sides BC, CA, AB respectively of a triangle ABC such that $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ then AD, BE, CF are concurrent. (converse of theorem 13)

14. The medians of a triangle are concurrent and the point of concurrence is a point of trisection of each median.

15. The altitudes of a triangle are concurrent.

16. In any triangle, the distance of the ortho-centre from any vertex is twice the distance of the circum-centre from the opposite side.

Further, the circum-centre, the centroid, and the ortho-centre are concurrent, and the centroid is a point of trisection of the line joining the circum-centre with the ortho-centre.

17. The Theorem of the Nine-Point circle of a triangle: The mid-points of the sides of a triangle, the feet of the altitudes and the mid-points of the lines joining the ortho-centre to the vertices lie on a circle, with its centre at the mid-point of the straight line joining the circum-centre and the ortho-centre and radius equal to half the circum-radius.

18. The Simson line or the Pedal line Theorem:

The feet of the perpendiculars from any point on the circum-circle of a triangle to its sides are collinear.

18. (a) If the feet of the perpendiculars from a point to the sides of a triangle be collinear, the point lies on the circum-circle of the triangle. (converse of Theorem 18)

19. Apollonius' Theorem:

If D is a point in the base BCof a triangle such that $m \cdot BD = n \cdot DC$, then,

$$m \cdot AB^2 + n \cdot AC^2 = (m+n)\, AD^2 + m \cdot BD^2 + n \cdot DC^2.$$

1. கோணங்களும் அவைகளின் அளவைகளும்

(Angles and their measurement):

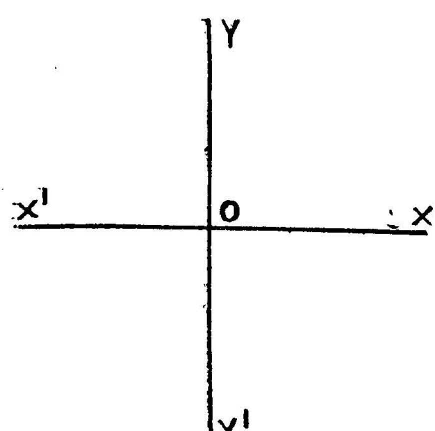
1·1. வடிவ கணிதத்தில் கோணத்தை அளப்பதற்குச் செங்கோணம் என்னும் அலகு (unit) பயன்படுத்தப்படுகிறது. இது சற்று பெரிய அளவுடையதா யிருப்பதால் அதைவிட சிறிய அலகுகளும் நிர்ணயிக்கப்பட்டு பயன்படுத்தப்படு கின்றன. அவை மூன்று வகைப்படும்.

(1) அறுபான் பகுப்பு முறை (sexagesimal measure)

(2) நூற்றின் பகுப்பு முறை (centesimal measure)

(3) வட்டமுறை அளவு (circular measure)

1·1·1. செங்கோணம் O என்ற ஆய ஆதியின் வழியாக X′OX, Y′OY என்ற செங்கோண ஆய அச்சுக்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.



(படம் 1)

XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX என்ற பகுதிகள் முறையே முதல் இரண்டாவது, மூன்ருவது, நான்காவது வட்டநாற் கூறு எனச் சொல்லப்படுகின்றன. இங்கு $\angle \underline{XOY}$, $\angle \underline{YOX'}$ $\angle \underline{X'OY'}$, $\angle \underline{Y'OX}$ ஒவ்வொன்றும் ஒரு செங்கோணமாகும்.

1·1·2. அறுபான் பகுப்பு முறை.

அறுபான் பகுப்பு முறையில் ஒரு செங்கோணம் 90 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அப்பிரிவுகளில் ஒவ்வொன் றும் ஒரு பாகை (degree) எனப்படும். ஒவ்வொரு பாகையும் 60 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு இருக்கிறது. அப்பிரிவு களில் ஒவ்வொன்றும் ஒரு கலை (minute) எனப்படும். ஒவ் வொரு கலையும் 60 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு அப்பிரிவு களில் ஒவ்வொன்றும் ஒரு விகலை(second) எனப்படும்.

எனவே 60 விகலைகள் $(60'')$ = ஒரு கலை $(1')$

60 கலைகள் $(60')$ = ஒரு பாகை (1°)

90 பாகைகள் (90°) = ஒரு செங்கோணம்.

1·1·3. நூற்றின் பகுப்பு முறை:

நூற்றின் பகுப்பு முறையில் ஒரு செங்கோணம் 100 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒரு கிரேடு (grade) எனப்படும். ஒவ்வொரு கிரேடும் 100 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒரு கலை எனப்படும். இவ்வாறே ஒவ்வொரு கலையும் 100 சம பகுதி களாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒரு விகலை எனப் படும். கிரேடு, கலை, விகலை முறையே g, ′, ″ எனக் குறிப் பிடப்படுகிறது.

எனவே 100 விகலைகள் $(100'')$ = ஒரு கலை $(1')$

100 கலைகள் $(100')$ = ஒரு கிரேடு $(^g)$

100 கிரேடுகள் (100^g) = ஒரு செங்கோணம்.

அறுபான் பகுப்பு முறை, நூற்றின் பகுப்பு முறை இவைகளை ஒன்றை மற்றொன்றாக மாற்றுதல் :

ஒரு செங்கோணம் 90°–க்கும் 100^g–க்கும் சமமாக இருப்பதால் $90^\circ = 100^g$

எனவே $1^\circ = \frac{100^g}{90} = \left(\frac{10}{9}\right)^g$

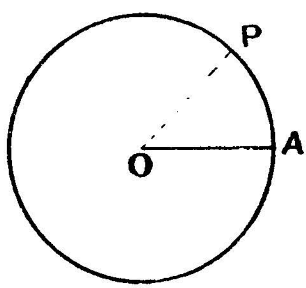
இவ்வாறே $1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$

1·1·4. வட்டமுறை அளவு : ஆரையன் (Radian) :

வட்டமுறை அளவைத் திட்டத்தில் கோணங்களை அளக்கும் அலகு ஆரையன் (அல்லது ஆரைக் கோணம்) எனப்படும். உயர் கணித இயலில் இந்த அளவைத் திட்டமே பெரிதும் பயன் படுத்தப்படுகிறது.

ஆரையன் - வரையறை : ஒரு வட்டத்தில் அதனுடைய ஆரத்தின் நீளங் கொண்ட வில் அவ்வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் ஒரு ஆரையனாகும்.

இதைப் பின் வருமாறு விளக்குவோம்.



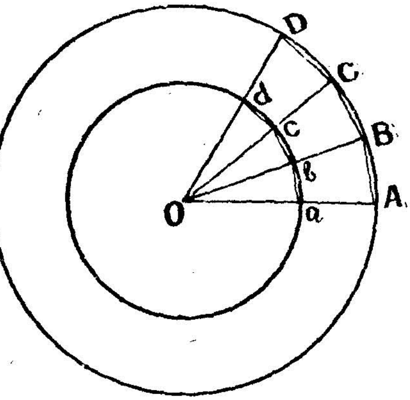
(படம் 2)

O-ஐ மையங்கொண்டு OA-ஐ ஆரமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. வட்ட வரையின் மேல் A என்ற ஏதாமொரு புள்ளியிலிருந்து ஓர் ஆரம் (= OA) நீளமுடைய AP என்ற ஒரு வில் எடுத்துக் கொள்க. இந்த வில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\angle \underline{AOP}$ ஆகும். வரையறைப்படி $\angle \underline{AOP}$

= 1 ஆரையன் அளவாகும்.

= 1^c எனக் குறிப்பிடப்படும்.

1·2. தேற்றம்: ஒரு வட்டத்தில் அதன் சுற்றளவும் விட்டமும் மாருத விகிதத்திலிருக்கும்.



(படம் 3)

படம் 3ல் காட்டியபடி Oஐ மையங்கொண்ட இரு வட்டங்கள் வரைக. பெரிய வட்டத்தினுள் n சமபக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணம் ABCD......வரைக. OA, OB, OC, OD......முறையே சிறிய வட்டத்தை a, b, c, d......ல் வெட்டட்டும். ab; bc; cd;......இவைகளை இணைக்கவும். இப்போது $abcd$......என்ற பல்கோணம் சிறிய வட்டத்தினுள் வரையப்பட்ட ஒரு n சமபக்கமுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணமாகும்.

$\triangle$ கள் AOB, aob களில் OA = OB; $oa = ob$

$$\therefore \frac{OA}{oa} = \frac{OB}{ob}$$

$$\therefore \triangle AOB \,|||\, \triangle aob$$

$$\therefore \frac{AB}{ab} = \frac{AO}{ao}$$

ABCD... n சம பக்கங்களையுடைய பல்கோணமாயிருப்பதால் அதன் சுற்றளவு $n \cdot AB$ ஆகும். இவ்வாறே $abcd$...ன் சுற்றளவும் $n \cdot ab$ ஆகும்.

இப்போது, $\dfrac{\text{பல்கோணம் ABCD...ன் சுற்றளவு}}{\text{பல்கோணம் } abcd\text{...ன் சுற்றளவு}} = \dfrac{n \cdot AB}{n \cdot ab}$

$$= \frac{AB}{ab} = \frac{OA}{oa}$$

பல் கோணம் எத்தனை பக்கங்களை உடையதாயினும் இம் முடிவு பொருந்தும். பல் கோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை, எல்லையின்றி உயர்ந்து செல்லும்போது, பல் கோணத்தின் சுற்றளவும், – வட்டத்தின் சுற்றளவும் சமமாகும்.

எனவே, $\dfrac{\text{வெளி வட்டச் சுற்றளவு}}{\text{உள்வட்டச் சுற்றளவு}} = \dfrac{OA}{oa}$

$$= \frac{\text{வெளிவட்ட ஆரம்}}{\text{உள்வட்ட ஆரம்}}$$

ஆதலால், $\dfrac{\text{வெளி வட்டச் சுற்றளவு}}{\text{வெளிவட்ட ஆரம்}}$

$$= \frac{\text{உள்வட்டச் சுற்றளவு}}{\text{உள் வட்ட ஆரம்}}$$

எந்த இருவட்டங்களுக்கும் இத்தொடர்பு பொருந்துமாதலின் $\dfrac{\text{வட்டத்தின் சுற்றளவு}}{\text{அவ்வட்ட ஆரம்}}$ என்ற விகித மதிப்பு எல்லா வட்டங்களுக்கும் ஒரே மாறிலி எண்ணுயிருக்கும் (a constant quantity); ஒரு வட்டத்தின் விட்டம், அதன் ஆரத்தைப்போல இருமடங்காதலின் எந்த வட்டத்திலும் அதன் சுற்றளவும் விட்டமும் ஒரு மாறிலி விகிதத்திலிருக்கும். ஆகவே எந்த வட்டத்திலும் $\dfrac{\text{சுற்றளவு}}{\text{விட்டம்}} =$ ஒரு மாறிலி.

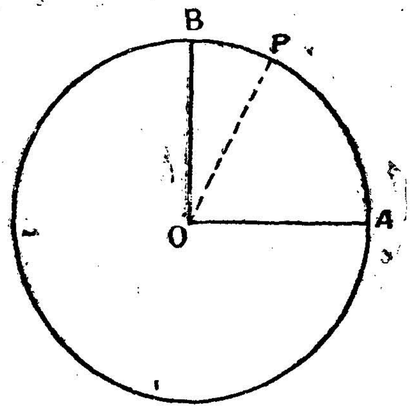
இதையே π யெனக் குறிப்பிடுகிறோம். இதனை 'பை' எனக் கூறுகின்றோம்.

π-ன் மதிப்பு அளவுக்கிணங்கியதல்ல. எட்டு இடங்களுக்கு அணித்தான மதிப்பு 3·14159265. ஆனல் நடைமுறையில் $\pi = 3\frac{1}{7}$ அல்லது 3.14 என்ற தோராய மதிப்பு பயன்படுகிறது. இதைவிட இன்னும் அணித்தான மதிப்பு $\pi = \frac{355}{113} = 3{\cdot}14159$.

$\frac{\text{சுற்றளவு}}{\text{விட்டம்}} = \frac{\text{சுற்றளவு}}{2 \times \text{ஆரம்}} = \pi$ என்றிருப்பதால்

வட்டத்தின் சுற்றளவு ஆரத்தைப் போல் 2π மடங்கு இருக்கும். எனவே ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r-எனக்கொண்டால் அதன் சுற்றளவு $2\pi r$ ஆகும்.

1·3. தேற்றம் : ஆரையன் ஒரு மாறிலிக் கோணம் (Constant angle).



(படம் 4)

AB என்பது ஒரு வட்ட நாற் கூற்றின் வில்.

r-வட்டத்தின் ஆரமானல் வில் $AB = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$

P என்ற புள்ளி வட்டத்தின் மேல், வில்AP ஆரத்திற்குச் சமமாக இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்வோம். ∴ வரையறுப்பு $\angle \underline{AOP}$ = ஒரு ஆரையன்.

ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலுள்ள இரண்டு கோணங்களின் விகிதம் அவைகளை ஏற்று நிற்கும் வட்ட வில்களின் நீளவிகிதத்திற்குச் சமமாதலின்,

$$\frac{\angle \underline{AOP}}{\angle \underline{AOB}} = \frac{\text{வில் } AP}{\text{வில் } AB} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \angle \underline{AOP} = \frac{2}{\pi} \angle \underline{AOB}$$

இங்கு $\angle$ AOP ஒரு ஆரையன்; $\angle$ AOB ஒரு செங்கோணம்.

எனவே ஒரு ஆரையன் $= \frac{2}{\pi} \times$ ஒரு செங்கோணம்.

இங்கு செங்கோணத்தின் அளவும், πன் அளவும் மாறிலிகளாதலால் ஆரையனும் ஒரு மாறிலியாகும்.

அதாவது $1^c = \frac{2}{\pi} \times 90^\circ$

$= \frac{180^\circ}{\pi}$

$\therefore \quad \pi^c = 180^\circ$

1·3·1. ஓர் ஆரையனின் அளவு (magnitude of a radian):

$1^c = \frac{180^\circ}{\pi}$

$= \frac{180^\circ}{3{\cdot}14159}$

$= 57^\circ\ 17'\ 45''$ (ஏறத் தாழ)

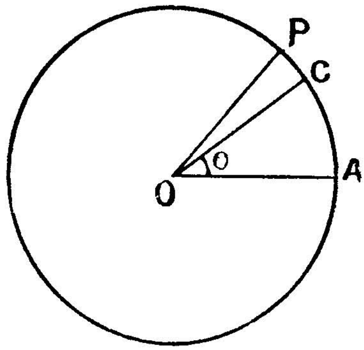
நாம் எல்லா இடங்களிலும் π^cஐ π என்றே குறிப்பிடுகிறோம். எனவே $\pi = 180^\circ$.

1.3·2. **சில பாகை அளவுகளும், அவைகளுக்குச் சமமான ஆரையன் அளவுகளும் :**

கோணங்கள்	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
ஆரையன்கள்	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

கோணங்கள்	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
ஆரையன்கள்	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

1·4. வட்ட வில்லின் நீளம் (Length of an arc of a circle) :



(படம் 5)

Oஐ மையமாகவும் rஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. $AC = l$ என்ற வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் θ^c எனக் கொள்க.

வில் AP r ஆனல் $\angle AOP = 1^c$

$$\text{எனவே} \quad \frac{\angle AOC}{\angle AOP} = \frac{\text{வில் } AC}{\text{வில் } AP}$$

$$\therefore \quad \frac{\theta^c}{1^c} = \frac{l}{r}$$

$$\therefore \quad l = r\theta.$$

θ ஆரையன் அளவில் கொடுக்கப்படும் பொழுதுதான் இவ்வாய்பாடு பொருந்தும்.

1·5. வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு (Area of a Sector of a circle) :

r–ஐ ஆரமாகக் கொண்ட வட்டக்கோணப் பகுதி AOC–ன் பரப்பு காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம். $\angle AOC = \theta^c$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{\text{வட்டக்கோணப் பகுதி AOC–ன் பரப்பு}}{\text{வட்டத்தின் பரப்பு}} = \frac{\theta^c}{2\pi^c} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$\therefore$ வட்டக்கோணப் பகுதி AOC-ன் பரப்பு $= \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2$

$$= \frac{1}{2} r^2 \theta.$$

இந்த வாய்பாடும் θ ஆரையன் அளவில் கொடுக்கப்படும் பொழுதுதான் பொருந்தும்.

(எ-கா.) (1) வட்ட அளவு முறையில் 1°ன் அளவு என்ன ?

$180^\circ = \pi^c$

$\therefore \quad 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$

எனவே ஒரு கோணம் பாகை அளவில் கொடுத்திருந்தால் அதை $\frac{\pi}{180}$ ஆல் பெருக்க அக்கோணம் ஆரையன் அளவில் பெறப்படும்.

(எ-கா.) (2) $\frac{7}{2}\pi$ ஆரையன்களைப் பாகை அலகில் மாற்றுக :

π ஆரையன்கள் – 180°

$\therefore \frac{7}{2}\pi$ ஆரையன்கள் $= \frac{7}{2} \times 180^\circ$

$= 630^\circ$

(எ-கா.) (3) $210^g\ 30'$-ஐ ஆரையன்களாக மாற்றுக.

$210^g\ 36' = 210{\cdot}30^g$

$= \frac{210{\cdot}30}{100} \times 90$ பாகைகள்.

$= \frac{210{\cdot}30}{100} \times 90 \times \frac{\pi}{180}$ ஆரையன்கள்

$= \frac{210{\cdot}30 \times \pi}{200}$ ஆரையன்கள்.

$= 3{\cdot}3047$ ஆரையன்கள்.

பயிற்சி 1

1. கீழ்க் கொடுத்திருப்பவைகளை மற்ற முறைகளில் மாற்றி எழுதுக.

(1) $48^\circ\ 51'\ 23''$

(2) $0{\cdot}6477^c$

(3) $2{\cdot}5^c$

(4) $705^g\ 5'\ 22''$

2. n பக்கமுள்ள ஒரு ஒழுங்கான பல் கோணத்தின் கோணத்தை ஆரையனில் கணக்கிடுக.

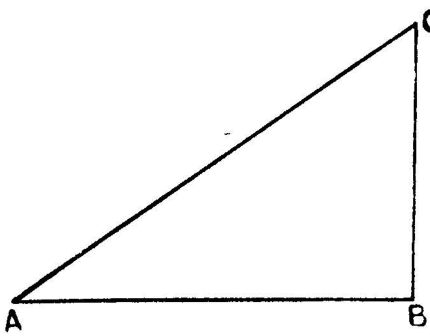
3. 48 செ. மீ. ஆரங்கொண்ட வட்டத்தில், 9·6 செ. மீ. நீளங்கொண்ட வில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணத்தை ஆரையனில் கணக்கிடுக.

4. 8. செ. மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு 24 ச. செ. மீட்டர்கள் எனின் மையக் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

2. குறுங்கோணத்தின் கோண கணிதத் தகவுகள்

(Trigonometrical Ratios of Acute angles) :

2·1. ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் 90° ஆக இருப்பின் அம்முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் எனப்படும்.



(படம் 6)

ABC என்னும் முக்கோணத்தில் $\angle$ B = 90° இப்படிப்பட்ட முக்கோணத்தில் A என்ற கோணத்திற்குரிய கோண கணிதத் தகவுகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு :

$\frac{BC}{AC}$ என்பது A என்ற கோணத்தின் நெடுக்கை (sine A)

$\frac{AB}{AC}$ என்பது A என்ற கோணத்தின் கிடக்கை (cosine A)

$\frac{BC}{AB}$ என்பது A என்ற கோணத்தின் இருக்கை (tangent A)

$\frac{AB}{BC}$ என்பது A என்ற கோணத்தின் எதிர் இருக்கை (cotangent A)

$\frac{AC}{AB}$ என்பது A என்ற கோணத்தின் எதிர்க்கிடக்கை (secant A)

$\frac{AC}{BC}$ என்பது A என்ற கோணத்தின் எதிர் நெடுக்கை (cosecant A)

இவைகளைப் பின்கண்டபடி சுருக்கமாக எழுதுவது மரபு.

படம் 6–ல் A என்ற கோணத்திற்கு BC எதிர்ப்பக்கம், AB அடுத்த பக்கம், AC செம்பக்கம் ஆகும்.

$$\text{Sin } A = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$$

$$\text{Cos } A = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{அடுத்த பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$$

$$\text{tan } A = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்தபக்கம்}}$$

$$\text{Cot } A = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{அடுத்த பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

$$\text{Sec } A = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

$$\text{Cosec } A = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

2·1·1. கோண கணிதத் தகவுகளை இணைக்கும் தொடர்புகள்:

மேலே கூறியுள்ள கோண கணிதத் தகவுகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையன என்று நாம் காணலாம்.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{BC}} = \frac{1}{\text{cosec } A}$$

$$\therefore \quad \text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{AB}} = \frac{1}{\sec A}$$

$$\therefore \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}} = \frac{1}{\cot A}$$

$$\therefore \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

அவ்வாறே $\cot A = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

மேலே நிறுவப்பட்ட தொடர்புகளில் இருந்து

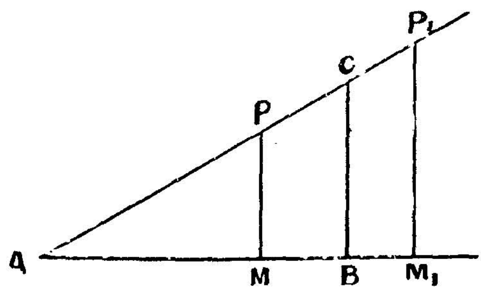
$\sin A \ \ \text{cosec } A = 1$

$\cos A \ \ \sec A = 1$

$\tan A \ \ \cot A = 1$ என நாம் நிறுவலாம்.

2·2. கோண கணிதத் தகவுகள் மாறிலிகள் :

எந்த செங்கோண முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொண்டு நாம் கோண கணிதத் தகவுகளைக் கண்டுபிடிப்போமானாலும் ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்திற்குரிய கோண கணிதத் தகவுகள் மாறிலிகள் என நாம் அறியலாம். அதாவது இத்தகவுகள் கோணத்தின் மதிப்பைப் பொருத்ததேயன்றி அக்கோணத்தை யுடைய செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங் களைப் பொருத்ததன்று. அதைப் பின் வருமாறு நாம் காணலாம்.



(படம் 7)

ABC என்னும் செங்கோண முக்கோணத்தில் AC, AC-யின் நீட்டலில் P, P_1 என்ற புள்ளிகளில் இருந்து முறையே PM, P_1M_1 என்ற குத்துக்கோடுகள் AB, AB-யின் நீட்டலுக்கு வரைக. முக்கோணங்கள் AMP, AM_1P_1 இரண்டும் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகும்.

$$\text{ஆகவே, } \sin A = \frac{MP}{AP} = \frac{M_1P_1}{AP^1} = \frac{BC}{AC}$$

எனவே sin A-ன் மதிப்பு MP குத்துக்கோட்டின் இருப்பிடத் தைப் பொருத்ததல்ல, கோணத்தின் மதிப்பைப் பொருத்ததே ஆகும். அவ்வாறே மற்ற கோண கணிதத் தகவுகளும்.

2·3. நாம் அடிக்கடி $(\sin A)^2$, $(\cos A)^3$, $(\tan A)^4$ போன்ற கோண கணிதத் தகவுகளின் இருபடி, முப்படி முதலிய மதிப் புக்களை எழுதவேண்டி வரும்.

அவைகளை எழுதும் மரபு பின்வருமாறு :

$$(\sin A)^2 \rightarrow \sin^2 A$$

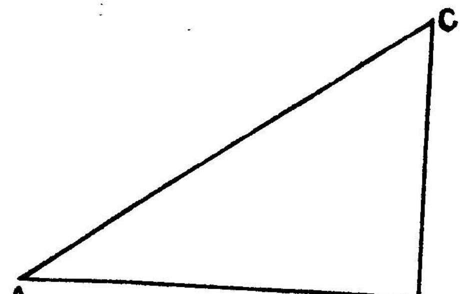
$$(\cos A)^3 \rightarrow \cos^3 A$$

$$(\tan A)^4 \rightarrow \tan^4 A$$

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^n \rightarrow \frac{\sin^n A}{\cos^n A}$$

ஆனால் $(\cos x)^{-1}$-ஐ $\cos^{-1}x$ என எழுதுவது கூடாது. $(\cos x)^{-1}$ எனில் $\frac{1}{\cos x}$. ஆனால் கோண கணித மரபில் $\cos^{-1}x$ என்பது x என்ற மதிப்பைக் கிடக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தைத்தான் குறிக்கும். [எடுத்துக்காட்டாக $\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 60^\circ$ $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ போன்றவைகளை நீங்கள் பின்னர் காண்பீர்கள்].

2·4. கோண கணிதத் தகவுகளுக்கிடையே உள்ள அடிப்படைத் தொடர்புகள் (Fundamental Relations):



(படம் 8)

ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle B = 90^\circ$ எனவும் $\angle A = \theta$ எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம். இது ஒரு செங்கோணமாதலின் பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி $AB^2 + BC^2 = AC^2$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

பின்வரும் அடிப்படைத் தொடர்புகளை நிறுவலாம்.

(i) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(ii) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

(iii) $1+\cot^2\theta=\mathrm{cosec}^2\theta$

(i) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$: நிறுவும் முறை :

$$\sin\theta=\frac{BC}{AC}$$

$$\cos\theta=\frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{BC}{AC}\right)^2+\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$=\frac{BC^2}{AC^2}+\frac{AB^2}{AC^2}$$

$$=\frac{BC^2+AB^2}{AC^2}$$

$$=\frac{AC^2}{AC^2}$$ [பிதாகரஸ் தேற்றப்படி $AC^2=AB^2+BC^2$]

$$=1$$

$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ என நிறுவப்படுகிறது (i)

(ii) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$: நிறுவும் முறை :

$$\tan\theta=\frac{BC}{AB}$$

$$\therefore 1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2$$

$$=1+\frac{BC^2}{AB^2}$$

$$=\frac{AB^2+BC^2}{AB^2}$$

$$=\frac{AC^2}{AB^2}$$

$$=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$=\sec^2\theta \quad \left[\because \frac{AC}{AB}=\sec\theta\right]$$

$\therefore 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ என நிறுவப்படுகிறது. (ii)

(iii) $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$: நிறுவும் முறை :

$$\cot\theta=\frac{AB}{BC}$$

$$\therefore\ 1+\cot^2\theta=1+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

$$=1+\frac{AB^2}{BC^2}$$

$$=\frac{BC^2+AB^2}{BC^2}$$

$$=\frac{AC^2}{BC^2}$$

$$=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$=\operatorname{cosec}^2\theta \qquad \left[\because\ \frac{AC}{BC}=\operatorname{cosec}\theta\right]$$

$\therefore\ 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ என நிறுவப்படுகிறது. (iii)

(எ-கா. (1) $\cos^4 A-\sin^4 A=2\cos^2 A-1$ என நிறுவுக.

$$\cos^4 A-\sin^4 A=(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^2 A-\sin^2 A)$$

$$=1[\cos^2 A-(1-\cos^2 A)]$$

[ஏனெனில் $\cos^2 A+\sin^2 A=1$]

$$=\cos^2 A-1+\cos^2 A$$

$$=2\cos^2 A-1$$

(நி. வே. Q. E. D)

(எ-கா.) (2) $\sin^3 A-\cos^3 A=(\sin A-\cos A)(1+\sin A\cos A)$ என நிறுவுக.

$$\sin^3 A-\cos^3 A=(\sin A-\cos A)(\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A)$$

$$=(\sin A-\cos A)(1+\sin A\cos A)$$

(நி. வே.)

(எ-கா.) (3) $\dfrac{\sec A}{\cot A+\tan A}=\sin A$ என நிறுவுக.

இடதுகைப் பக்கம் $=\dfrac{\sec A}{\cot A+\tan A}$

$$=\frac{\dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\sin A}{\cos A}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}}$$

$$=\frac{\sin A\cos A}{\cos A}$$

$$=\sin A \quad (\text{நி. வே})$$

(எ-கா.) (4) $2\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ என நிறுவுக.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}$$

$$=2\operatorname{cosec}\theta$$

(நி. வே.)

(எ-கா.) (5)

$\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\tan A+\sec A$ என நிறுவுக.

$$\frac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\frac{\tan A+\sec A-(\sec^2 A-\tan^2 A)}{\tan A-\sec A+1}$$

$[\because 1+\tan^2 A=\sec^2 A]$

$$= \frac{(\tan A+\sec A)-(\sec A+\tan A)(\sec A-\tan A)}{\tan A-\sec A+1}$$

$$= \frac{(\sec A+\tan A)(1-\sec A+\tan A)}{\tan A-\sec A+1}.$$

$= \sec A+\tan A.$ (நி. வே.)

பயிற்சி 2 (i)

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=1-2\sin^2\theta$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

(3) $\sin\theta\tan\theta=(1-\cos^2\theta)\sec\theta$

(4) $\cos A\tan A+\sin A\cot A=\sin A+\cos A$

(5) $(\sec x+\cos x)(\sec x-\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$

(6) $\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\sin^2\theta\cos^2\phi+\cos^2\theta\sin^2\phi=1$

(7) $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$

(8) $\dfrac{1}{1+\sin A}+\dfrac{1}{1-\sin A}=2\sec^2 A$

(9) $\dfrac{\sin^2 A}{1+\cot A}+\dfrac{\cos^2 A}{1+\tan A}=1-\sin A\cos A$

(10) $\dfrac{\sec A}{\cot A+\tan A}=\sin A$

(11) $\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A$

(12) $(\sec A-\operatorname{cosec} A)(1+\cot A+\tan A)=\dfrac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec} A}-\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec A}$

(13) $\sec^4 A-1=2\tan^2 A+\tan^4 A$

(14) $\sin^6 A-\cos^6 A=(\sin A+\cos A)(1+\sin A\cos A)(\sin A-\cos A)(1-\sin A\cos A)$

(15) $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1-\sin A}{1-\cos A}=2\operatorname{cosec} A\,(\operatorname{cosec}-\cos A)$

(16) $(\sec^2 A+\tan^2 A)\,(\operatorname{cosec}^2 A+\cot^2 A)$
$=1+2\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A$

(17) $[\sqrt{\sec A+\tan A}+\sqrt{\sec A-\tan A}]^2=2\,(1+\sec A)$

(18) $\cos^6 A+\sin^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$

(19) $\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$
$=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$

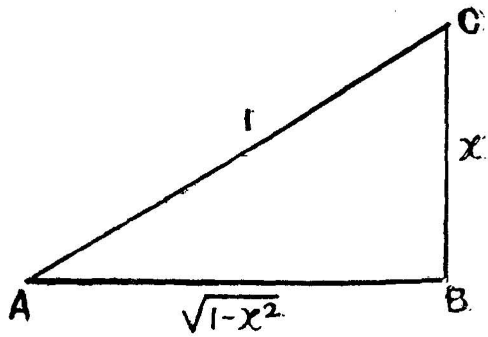
(20) $\sec^2 A\tan^2 B-\tan^2 A\sec^2 B=\tan^2 B-\tan^2 A$

(21) $\tan^2 A-\tan^2 B=\dfrac{\cos^2 B-\cos^2 A}{\cos^2 A\cos^2 B}=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$

(22) $2\sec^2\theta-\sec^4\theta-2\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}^4\theta=\cot^4\theta-\tan^4\theta.$

2.5. எல்லாக் கோண கணிதத் தகவுகளையும் ஒரு தகவின் சார்பலனுகக் கூறல் :—

Sin $A=x$ என்ருல் $\angle A$ன் மற்ற கோண கணிதத் தகவுகளையும் xன் சார்பலனுகக் கண்டுபிடிக்க.



(படம் 9)

இப்போது ABC என்ற ஒரு செங்கோண முக்கோணம் எடுத்துக் கொள்வோம். sin $A=x$ எனக்கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இங்கு BCஐ x எனவும், ACஐ 1 எனவும் கொண்டால் sin $A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{x}{1}$ ஆகிறது. அப்போது $AB=\sqrt{1-x^2}$. இங்கு ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் நாம் அறிகிரும்.

ஆகவே
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \sqrt{1-x^2}$$
$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{x}$$

இவைகளை நாம் 2·4-ல் நிறுவிய அடிப்படைத் தொடர்புகளைக் கொண்டும் நிறுவலாம்.

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$$
$$= \sqrt{1-x^2}$$
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$= \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$
$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$
$$= \frac{1}{x}$$

2·5·1. பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து மற்றைய கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டிய சார்பலன்கள் அறிக.

(பயிற்சியாகச் செய்து பார்க்கவும்)

கொடுக்கப் பட்டது	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	cosec θ
$\sin\theta = x$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\theta = x$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan\theta = x$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
$\cot\theta = x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$
$\sec\theta = x$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{cosec} = x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

(எ-கா.) (1) A ஒரு குறுங்கோணம். $\sin A = \frac{1}{2}$ ஆனால் sec A, cot A-ன் மதிப்புக்கள் என்ன ?

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3}$$

அம் மதிப்புக்களை நேரடியாக 2·5 அல்லது 2·5·1ல் காட்டிய முறையிலும் செய்யலாம். 2·5·1–ல் கண்ட முறை பின் கூறப் பட்டிருக்கிறது.

$\sin A = \frac{1}{2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் பின் வரும் அளவுகள் உள்ள முக்கோணம் வரைக.

$BC = 1$

$\angle B = 90°$

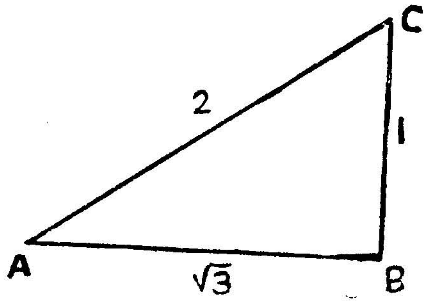
$AC = 2$

இம் முக்கோணத்தில்

$$\sin A = \frac{1}{2}$$

மேலும் $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$$= \sqrt{3}$$



(படம் 10)

$$\sec A = \frac{AC}{BA}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$= \sqrt{3}$$

பயிற்சி 2 (ii)

பின் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கோணங்கள் குறுங்கோணங் களெனக் கொள்க.

(1) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ என்றால் மற்ற தகவுகளின் மதிப்பென்ன?

(2) $\sin\theta = \frac{3}{5}$ என்றால் மற்ற தகவுகளின் மதிப்பென்ன?

(3) $\tan\theta = \frac{7}{24}$ என்றால் மற்ற தகவுகளின் மதிப்பென்ன?

(4) $\sec A = \frac{5}{3}$ என்றால் $\frac{\cot^2 A - \tan^2 A}{\cot^2 A + \tan^2 A}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(5) $\cos A = \frac{1}{7}$; $\cos B = \frac{13}{14}$ என்றால்
$\sec A \sec B - 2\tan A \tan B = 2$ என்று நிறுவுக.

(6) $\sin\theta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^3}$ என்றால் $\sec\theta + \tan\theta = \frac{a}{b}$ என்று நிறுவுக.

(7) $\tan A = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$ என்றால் $\cos A$, $\text{cosec}^2 A$ என்பவற்றின் மதிப்புகளென்ன?

(8) $\sec\theta - \tan\theta = a$ என்றால் $\sin\theta = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$ எனக் காட்டுக.

(9) $\tan A + \cot A = 5$ என்றால் $\tan^3 A + \cot^3 A = 110$ எனக் காட்டுக.

(10) $\sin\theta + \text{cosec}\,\theta = 3$ என்றிருந்தால், $\sin^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 7$ என்று நிறுவுக.

2·6. சில மதிப்புக்கள் – $\frac{o}{a}$, $\frac{a}{o}$ முதலியன;

$\frac{a}{b}$ என்ற பின்னத்தில் a-ம், b-ம் கூட்டு முழு எண்களாகவோ குறை முழு எண்களாகவோ (பூச்சியம் விலக்கப்பட்டது) இருப்பின் $\frac{a}{b}$ ன் மதிப்பை நாம் அறிவோம். எடுத்துக்காட்டாக $\frac{3}{4}$, $\frac{-4}{7}$, $\frac{-4}{-7}$ என்பவற்றின் மதிப்புக்கள் நமக்குத் தெளிவானவை.

ஆனால் $a=o$ மதிப்புப் பெறின், அதாவது ஒரு பின்னத்தின் விகுதி (பின்னமேலெண்–numerator) பூச்சியமானால் $\frac{a}{b}=\frac{o}{b}=0$ என்பது எளிதில் விளங்கும். ஆனால் $b=o$ ஆனால், அதாவது ஒரு பின்னத்தின் பகுதி (பின்னக் கீழெண்–Denominator) பூச்சியமானால் $\frac{a}{o}$ –ன் மதிப்பென்ன?

இதை ஒருவாறு பின்வரும் முறையில் புரிந்து கொள்ளலாம்.

ஒரு பின்னத்தின் விகுதி ஒரு குறிப்பிட்ட எண் எனக் கொள்வோம். அதனுடைய பகுதி மிகச் சிறிய எண்ணுயிருப்பின், அப்பின்னத்தின் மதிப்பு பெரியதாகவிருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக $\frac{4}{0\cdot0001}=40,000$ என நமக்குத் தெரியும்.

இப்போது பகுதி மிக மிகக் குறைந்து செல்லும்போது பின்னத்தின் மதிப்பு உயர்ந்து கொண்டே செல்லும். இப்போது $\frac{4}{0\cdot00000001}=4\times10^{8}$ ஆகும்.

ஆகவே, ஒரு பின்னத்தின் பகுதி குறைந்து கொண்டே போய், பூச்சியத்திற்கு மிக அருகாமையில் வருமாயின், அதாவது $(0\cdot1)^{12}$, $(0\cdot1)^{20}$, $(0\cdot1)^{100}$..........என்ற முறையில் குறைந்து கொண்டே போகுமாயின் பின்னத்தின் மதிப்பு, மிக மிக அதிகமாகிக் கொண்டே போகும். இந்த அடிப்படையில் $\frac{4}{0}=$ என்பது ஒரு அளவற்ற, மிக மிகப் பெரிய எண் எனக்

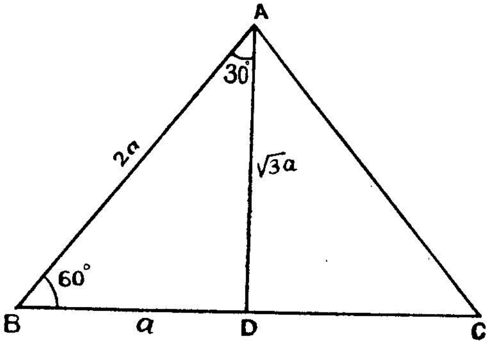
கொள்கிறோம். இதையே $\frac{4}{0}$ கந்தழி ($\propto$) என எழுதுவது மரபாகும். (கந்தழி என்பது ஒரு எண்ணைக் குறிப்பதில்லை, ஆனால் அளவற்ற மிகப் பெரியது என்றே கொள்ளுதல் வேண்டும்). எனவே $\frac{a}{o}$ (a ஒரு கூட்டெண்) என்பதை கந்தழி அல்லது ஒரு எல்லையற்ற எண் என்று குறிப்பிடுவது கணித மரபாகும்.

இந்த முறையில், பின்ன மேலெண், ஒரு குறையெண்ணா யிருப்பின், $\frac{a}{o}$ (a ஒரு குறையெண்) என்பதை – கந்தழி அல்லது $-\propto$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். $\frac{1}{0} = \propto$: $\frac{-1}{0} = -\propto$.

$\frac{\text{கூட்டெண்}}{0} = \propto$; $\frac{\text{குறையெண்}}{0} = -\propto$ என்பவை நமது கவனத்திலிருக்க வேண்டும். ($\frac{0}{0}$ என்று சிறப்பாகப் பார்ப்போமானால், அதற்கு நிர்ணயிக்கக் கூடிய மதிப்பில்லை. இது உயர் கணிதத்தில் விளக்கப்படும்.)

2·7·1. சில கோண கணிதத் தகவுகளின் மதிப்புக்கள்:

30°, 60°-யின் கோண கணிதத் தகவுகள் $30° = \left(\frac{\pi}{6}^{c}\right.$; $\left.60° = \frac{\pi}{3}^{c}\right)$



(படம் 11)

ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒவ்வொரு பக்கமும் $2a$-ஆக இருக்கட்டும். ஒவ்வொரு கோணமும் 60° ஆக இருக்கும். BC-க்கு A-யிலிருந்து AD என்னும் செங்குத்துக்கோடு வரைவோம். D என்னும் புள்ளி BC-யை இரு சம கூறுக்கும்.

அப்போது $BD = DC = a$.

ABD என்ற செங்கோணத்தில்.

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$= 4a^2 - a^2$$

$$= 3a^2$$

$$\therefore \ AD = \sqrt{3}\ a$$

இப்போது $\angle BAD = 30^\circ$ ஆகும்.

$$\sin 30^\circ = \sin \angle BAD = \frac{BD}{BA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos \angle BAD = \frac{AD}{BA} = \frac{\sqrt{3}\ a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan \angle BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}\ a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \cot \angle BAD = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}\ a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \sec \angle BAD = \frac{BA}{AD} = \frac{2a}{\sqrt{3}\ a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \operatorname{cosec} \angle BAD = \frac{BA}{BD} = \frac{2a}{a} = 2$$

இம் முக்கோணத்திலேயே $\angle ABD = 60^\circ$

எனவே $\sin 60^\circ = \sin = \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}\ a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 60^\circ = \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

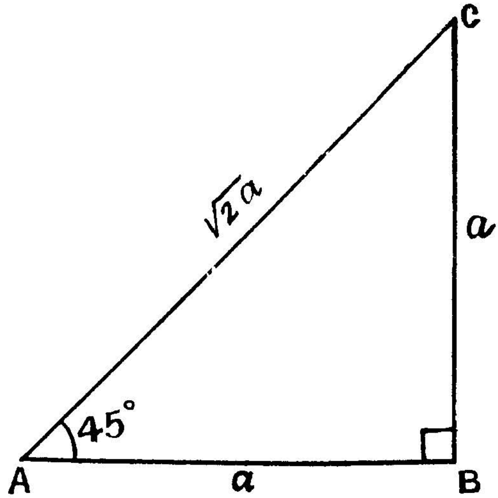
$$\tan 60^\circ = \tan \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{3}\ a}{a} \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \cot \angle \underline{ABD} = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \sec \angle \underline{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \operatorname{cosec} \angle \underline{ABD} = \frac{AB}{AD} = \frac{2a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

2·7·2. 45°ன் கோணகணிதத் தகவுகள் :



(படம் 12)

ABC என்ற ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம் வரைக. AB = BC = a எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \angle \underline{BCA} = \angle \underline{CAB} = 45^\circ$$

மேலும் $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= a^2 + a^2$$

$$= 2a^2$$

$$\therefore \quad AC = \sqrt{2}\,a$$

$$\therefore \quad \sin 45^\circ = \sin \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \sin \angle CAB = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

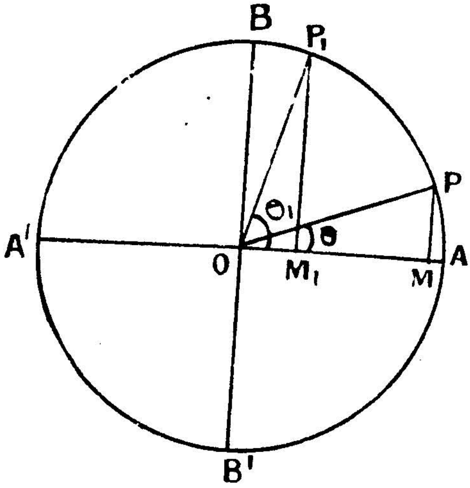
$$\tan 45^\circ = \tan \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot \angle CAB = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec \angle CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}\,a}{a} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \operatorname{cosec} \angle CAB = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}\,a}{a} = \sqrt{2}$$

2·7·3. 0°, 90°ன் கோண கணிதத் தகவுகள் :



(படம் 13)

Oஐ மையங்கொண்டு 'a' நீளம் ஆரங்கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. மையம் வழியாக AOA', BOB' என்ற இரு குத்துக்கோடுகள் வரைக. வட்டவரையின் மேல் A,Bக்கு இடையில் P என்ற புள்ளியை Aக்கு வெகு அருகாமையில் எடுத்துக் கொள்வோம். P-யிலிருந்து OA-க்கு PM என்ற குத்துக்கோடு வரைக.

$\angle POM = \theta$ எனக் கொள்வோம்.

P என்னும் புள்ளி Aஐ நெருங்கி வரவர θன் மதிப்புக் குறைந்து, OMன் நீளம் அதிகரிக்கிறது. θ–ன் மதிப்பு பூச்சியத் திற்குச் சமமாகும் நிலே வருகிறது.

அப்போது $OP = OM = a$

மேலும் $MP = 0$

எனவே $\sin 0° = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{0}{OP} = 0$

$$\cos 0° = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{MP}{OM} = \frac{0}{OP} = 0$$

$$\cot 0° = \frac{OM}{MP} = \frac{OP}{0} = \infty \quad \text{(கந்தழி)}$$

$$\sec 0° = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 0° = \frac{OP}{MP} = \frac{OP}{0} = \infty \quad \text{(கந்தழி)}$$

2·7·4. அதே வட்டவரையின் மேல் A, B–க்கு இடையில் P_1 என்ற புள்ளியை Bக்கு வெகு அருகாமையில் எடுத்துக் கொள்வோம். P_1–லிருந்து OA–க்கு P_1M_1 என்ற குத்துக் கோடு வரைக. $\angle P_1OM_1 = \theta_1$ எனக் கொள்வோம். P_1 என்னும் புள்ளி B–ஐ நெருங்கிவர வர θ_1–ன் மதிப்பு 90°க்கு அண்மையில் வருகிறது. θ_1–ன் மதிப்பு 90° க்குச் சமமாகும் நிலே வருகிறது.

அப்போது $OP_1 = M_1P_1 = a$

மேலும் $OM^1 = 0$

$$\therefore \sin 90° = \frac{M_1P_1}{OP_1} = \frac{OP_1}{OP_1} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{0}{OP^1} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{M_1P_1}{OM_1} = \frac{OP_1}{0} = \infty$$

$$\cot 90° = \frac{OM_1}{MP_1} = \frac{0}{OP_1} = 0$$

$$\sec 90° = \frac{OP_1}{OM_1} = \frac{OP_1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{OP_1}{MP_1} = \frac{0}{OP_1} = 0$$

குறிப்பு : tan 90°-ஐப் பொருத்த மட்டில் 1·3·4-ல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விளக்கத்தையும் பார்த்துக் கொள்ளவும்.

(–) என்பது ஒரு சிறு மதிப்பேற்குமாயின்,

$$\tan(90-(+)) \rightarrow +\infty$$
$$\tan(90+(-)) \rightarrow -\infty$$

என்பதும் 1·3·4-ல் விளக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதையும் உடனுக்குடன் அறிந்து கொள்க. ஆனால் பொதுவாக tan 90° = ∝ (கூட்டுக் கந்தழி மதிப்பு) என்றே கொள்ளப்படுகிறது.

2·7·5. பின் அட்டவணையிலிருந்து நாம் இதுவரை கண்ட கோண கணிதத் தகவுகளின் மதிப்புகளைக் கண்டறியலாம்.

கோணம் θ = தகவு	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∝
cot θ	∝	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∝
cosec θ	∝	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

(எ-கா) (1)

$\sin^2 60°.\ \cos^2 45°:\ \sin 30° = \frac{3}{16}$ என நிறுவுக.

$$\sin^2 60° \cos^2 45° \sin 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{16} \text{ (நி. வே)}$$

(எ-கா) (2)

$\tan^2 60°+4 \cot^2 45°+3 \sec^2 30°+\cos^2 90°$ன் மதிப்பு என்ன?

$$\tan^2 60°+4 \cot^2 45°+3 \sec^2 30°+\cos^2 90°$$

$$=(\sqrt{3})^2+4\cdot(1)^2+3\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0$$

$$=3+4+3\cdot\frac{4}{3}$$

$$=11. \quad \text{(நி. வே.)}$$

பயிற்சி 2 (iii)

பின் வருவனவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க :

1. (1) $\sin 30°+\cos 60°$

   (2) $\sin 45°+\sec 45°$

   (3) $\sin 30°+\cos 30°+\tan 30°$

   (4) $\tan 45° - \sec 60°$

   (5) $\operatorname{cosec} 30° - \cot 45°$

2. (1) $\sin^2 30°+\sin^2 45°+\sin^2 60°$

   (2) $\sin^2 60° \cos^2 45° \sin 30°$

   (3) $\cos 30° \cos 60° - \sin 30° \sin 60°$

   (4) $\sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

   (5) $\tan^2 30°+\tan^2 45°+\tan^2 60°$

   (6) $\tan^2 45°+7 \cot^2 45°+2 \cos^2 90°$

   (7) $2 \tan^2 45°+\tan^2 60°$

3. (1) $\sin 30^\circ \quad \cos 60^\circ \quad \tan 45^\circ$

   (2) $\sin 60^\circ \quad \sec 30^\circ \quad \cot 60^\circ \quad \tan 60^\circ$

   (3) $\tan 45^\circ \quad \operatorname{cosec} 90^\circ \quad \cot 45^\circ$

   (4) $\sec 60^\circ \quad \operatorname{cosec} 45^\circ \quad \cos 45^\circ$

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

4. (1) $\dfrac{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ} = \dfrac{\sec 45^\circ + \tan 45^\circ}{\sec 45^\circ - \tan 45^\circ}$

   (2) $\dfrac{(1 + \cot 60^\circ)^2}{(1 - \cot 60^\circ)^2} = \dfrac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ}$

   (3) $4 \cos^2 \dfrac{\pi}{3} \sin^2 \dfrac{\pi}{4} + \sin \dfrac{\pi}{6} = 2 \cos \dfrac{\pi}{3}$

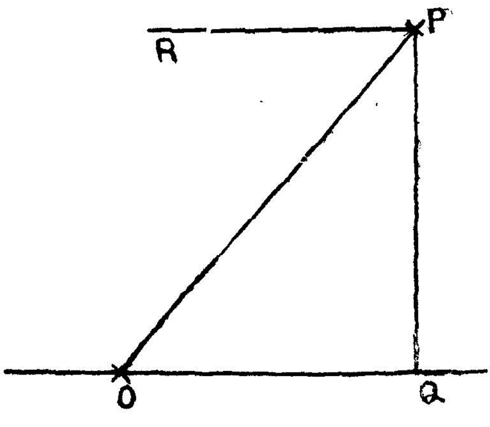
   (4) $\cos^2 \dfrac{\pi}{4} - \sin^2 \dfrac{\pi}{4} = \cos \dfrac{\pi}{2}$

   (5) $3 \sin \dfrac{\pi}{6} - 4 \sin^3 \dfrac{\pi}{6} = \sin \dfrac{\pi}{2}$

3. உயரங்களும் தொலைகளும்

(Heights and Distances):

3·1. நேரடியாக அளந்தறிய முடியாத உயரங்களையும் தொலைகளையும், அளந்தறியக்கூடிய உயரங்களையும் தொலைகளையும் வைத்துக் கொண்டு கணக்கிடல் கோண கணிதத்தின் ஒரு நோக்கமாகும். அவ்விதம் கணக்கிடக்கூடிய முறைகள் சிலவற்றைக் கீழே ஆராய்வோம்.



(படம் 14)

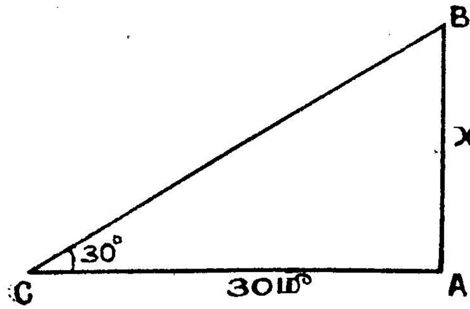
ஒரே மட்டத்திலில்லாத O, P என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். Oவிலிருந்து வரையும் கிடைக்கோடும் (படுக்கைக் கோடும்) Pயிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடும் Qயில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். Pயிலிருந்து OQக்கு இணையாக PR என்ற நேர்க்கோடு வரைக.

$\angle$POQ என்பது Oவிலிருந்து புள்ளி Pயின் ஏற்றக் கோணம் (Angle of Elevation) என்று கூறப்படும்.

இம்மாதிரியே $\angle$RPO என்பது Pயிலிருந்து புள்ளி Oவின் இறக்கக் கோணம் (Angle of Depression) எனக் கூறப்படும்.

சில கணக்குகள் எடுத்துக் காட்டாகச் செய்யப் பட்டிருக்கின்றன.

(எ–கா.) (1) 30 மீட்டர் தூரத்திற்கு அப்பால் இருக்கும் ஒரு கொடிக்கம்ப உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆனால் அதன் உயரம் என்ன?



(படம் 15)

ABஐக் கொடிக் கம்பமெனக் கொள்க. அதன் உயரம் AB $= x$ மீட்டராக இருக்கட்டும். கொடிக்கம்பத்தின் பாதம் Aவிலிருந்து, 30 மீட்டர் தூரத்திலுள்ள புள்ளி C எனக் கொள்க.

Bன் ஏற்றக் கோணம் $\angle ACB = 30°$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore \tan 30° = \frac{BA}{CA} \quad (\triangle\, ABCல்)$$

$$= \frac{x}{30}$$

$$\therefore \quad x = 30 \tan 30^\circ$$

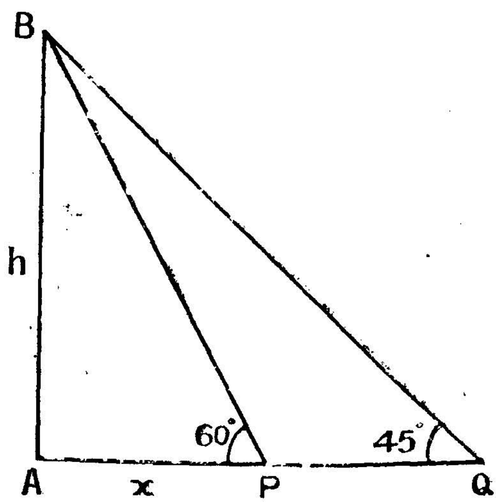
$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30\sqrt{3}}{3}$$

$$= 17\cdot321 \text{ மீட்டர்}$$

∴ கொடிக்கம்பத்தின் உயரம் = 17·321 மீட்டர்.

(எ-கா.) (2) கோபுரத்திற்கு ஒரு புறத்தில் P,Q என இரு புள்ளிகள் கோபுரத்தின் அடியோடு ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருக்கின்றன. Pயிலிருந்து கோபுரத்தின் ஏற்றக் கோணம் 60°. Q-யிலிருந்து ஏற்றக் கோணம் 45°. PQ-120 மீட்டர் எனின் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.



(படம் 16)

AB என்பது கோபுரம். அதன் உயரம் AB = h எனக் கொள்க.

P, Q என்ற புள்ளிகளிடைப்பட்ட தூரம் = 120 மீட்டர்

Pயிலிருந்து Bன் ஏற்றக் கோணம் $\angle APB = 60^\circ$

Qலிருந்து Bன் ஏற்றக் கோணம் $\angle AQB = 45°$

$AP = x$ மீட்டர்களெனக் கொள்க.

APBல், $\frac{h}{x} = \tan 60°$

$= \sqrt{3}$

$\therefore\ h = \sqrt{3}\ x \quad \text{(i)}$

$\triangle$ AQBல், $\frac{h}{x+120} = \tan 45°$

$= 1$

$\therefore\ h = x + 120$

(i)ன் படி, $\sqrt{3}\ x = x + 120$

$\therefore\ \sqrt{3}\ x - x = 120$

$x = \frac{120}{\sqrt{3} - 1}$

$= \frac{120\,(\sqrt{3}+1)}{2}$

$= 60\,(\sqrt{3}+1)$

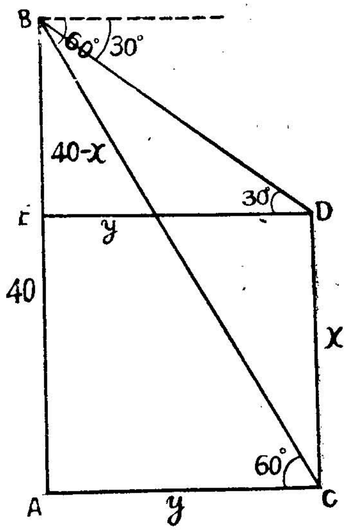
$h = \sqrt{3}\ 60\ (\sqrt{3}+1)$

$= 60\,(3+\sqrt{3})$

$\doteq$ 283·92 மீட்டர்

$\therefore$ கோபுரத்தின் உயரம் 283· 92 மீட்டர்.

(எ-கா.) (3) 40 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தி லிருந்து ஒருவனுக்கு ஒரு தூண் தெரிகிறது. அத்தூணின் உச்சியின் இறக்கக் கோணம் 30°; அடியின் இறக்கக் கோணம் 60°. அத்தூணின் உயரம் என்ன ?



(படம் 17)

AB கோபுரத்தின் உயரம் எனவும் CD$=x$ தூணின் உயரம் எனவும் கொள்வோம்.

AC$=y$ கோபுரத்தின் அடிக்கும், தூணின் அடிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் எனக் கொள்வோம்.

$\triangle$ ABCல் $\dfrac{AC}{AB} = \cot 60°$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{40}{\sqrt{3}} \quad \text{(i)}$$

$\triangle$ BDEல் $\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{40-x}{y} = \tan 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad 40 - x = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad x = 40 - \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{(i)ன் படி, } x = 40 - \frac{40}{\sqrt{3}\ \sqrt{3}}$$

$$= 40 - \frac{40}{3}$$

$$= \frac{80}{3}$$

$$= 26{\cdot}7 \text{ மீட்டர்}$$

தூணின் உயரம் 26·7 மீட்டர்.

பயிற்சி 3

(1) ஓர் ஏணியின் நீளம் 16 மீட்டர். அது தரையோடு 60° சாய்வில் ஒரு சுவரின்மேல் சார்த்தப்பட்டிருக்கிறது. அது சுவரை எவ்வளவு உயரத்தில் தொட்டுக்கொண்டு இருக்கும்?

(2) ஒருவன் ஒரு கோபுரத்திலிருந்து 50 மீட்டர் தூரத்தில் நிற்கிறான். கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 60° எனக் காண்கிறான். கோபுரத்தின் உயரம் என்ன ?

(3) P Q என்ற ஒரு நேர்க்கோட்டில் ஒரு கோபுரம் இருக்கிறது. P, Q என்ற இடங்களிலிருந்து பார்க்கும்போது கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 45°, 60°. P, Qக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 20 மீட்டரானால் கோபுரத்தின் உயரமென்ன ?

(4) 200 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து குன்றின் ஒரு பக்கத்தில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் தரையிலுள்ள இரண்டு எல்லைக்கற்களின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 30°,45°. அவ்விரண்டு கற்களுக் கிடைப்பட்ட தூரமென்ன ?

(5) 400 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கின் உச்சியில் இருந்து ஒரு கம்பத்தின் உச்சி, அடிப்புள்ளிகளின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45°, 60° எனின் கம்பத்தின் உயரத்தையும் கம்பத்திற்கும் கலங்கரை விளக்கத்திற்கு மிடைப்பட்ட தூரத்தையும் கண்டுபிடி.

(6) ஒரு கட்டிடத்திலிருந்து 9 மீட்டர் தூரத்திலுள்ள ஒரு இடத்திலிருந்து அதன் மேலுள்ள கொடிக் கம்பத்தின் அடி, உச்சிகளின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30°, 60° எனின் கம்பத்தின் உயரமென்ன ?

(7) ஓர் ஆற்றில் ஒரு கரையோரத்தில் நிற்கும் ஒருவனுக்கு நேர் எதிரே எதிர்க்கரையோரத்தில் உள்ள ஒரு மரத்தின் உச்சி 60° ஏற்றக்கோணத்தில் தோன்றுகிறது. கரைக்குச் செங்குத்தாக 180 மீட்டர் தூரம் பின்னே நகர்ந்து பார்த்த போது மரத்தின் உச்சி 30° ஏற்றக்கோணத்தில் தோன்றுகிறது. அவன் உயரத்தைப் பொருட்படுத்தாமல் மரத்தின் உயரத்தையும் ஆற்றின் அகலத்தையும் கண்டுபிடி.

(8) ஒரு கொடிக்கம்பம் ஒரு கட்டிடத்திலிருந்து 50 மீட்டர் தூரத்திலுள்ளது. அக்கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து கொடிக் கம்ப அடியின் இறக்கக் கோணம் 30° ; அதன் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 45°. கொடிக்கம்பத்தின் உயரமென்ன ? கட்டிடத்தின் உயரமென்ன ?

(9) இரு கோபுரங்களின் உச்சிகள் P, Q. அவைகளின் அடிகள் A, B. BAன் நீட்டலில் உள்ள R என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து P, Qன் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 30°, 45°. Rலிருந்து Aஐ நோக்கி 40 மீட்டர்கள் வந்தால் அவ்விடத்திலிருந்து P, Qன் ஏற்றக் கோணங்கள் 60°, 60°. கோபுரங்களின் உயரமென்ன ?

(10) ஒரு குன்றின் உச்சியில் இருந்துகொண்டு மற்ரெரு குன்றின் உச்சியை 30° இறக்கக் கோணத்திலும் அதன் அடியை 45° இறக்கக் கோணத்திலும் ஒருவன் காண்கிருன். முதல் குன்றின் உயரம் 90 மீட்டர் எனின் இரண்டாவது குன்றின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

(11) 20 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கட்டிடத்தின் அடியில் இருந்து ஒரு கோபுர உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 60°. கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 45°. கோபுரத்தின் உயரமென்ன ?

(12) A என்னும் இடத்திலிருந்து PQ என்ற ஒரு கோபுர உச்சியாகிய Qன் ஏற்றக்கோணம் 30°. AP நேர்க்கோட்டில் கோபுரத்தை நோக்கி 150 டெசி மீட்டர் சென்ற பிறகு அதன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 45°. கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

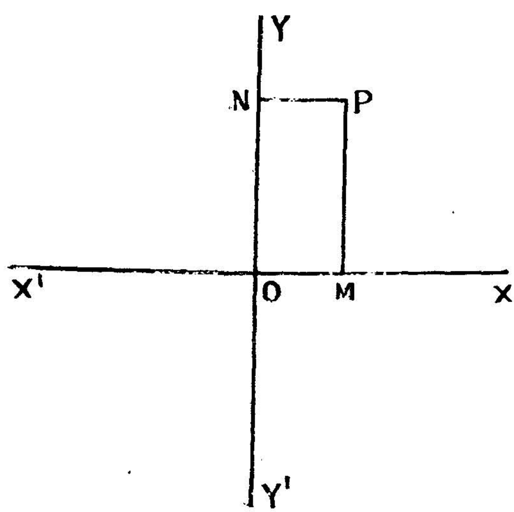
(13) 30 மீட்டர் உயரமுள்ள இரு கோபுரங்கள் ஒருவருக்கு நேர் எதிர்த்திசைகளில் இருக்கின்றன. அவைகளின் ஏற்றக்கோணங்கள் 45°, 30° எனின் இரண்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை கணக்கிடு.

(14) 100 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டில் இரண்டு எல்லைக் கற்கள் உள்ளன. அவைகளின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 30°, 60° எனின் இருகற்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடு.

(15) ஒரு உயரமான இடத்திலிருந்து 40 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு பொருளின் இறக்கக்கோணம் 60°. அவ்விடத்தின் அடிதளத்தில் இருந்து அதன் ஏற்றக்கோணம் 45° எனின் இடத்தின் உயரம் என்ன ?

4. அனைத்து கோணங்களுக்குரிய கோண கணிதத் தகவுகள்- அவைகளின் குறியீடுகள் - துணைக் கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள்

(Trigonometric ratios of angles of any size and sign):

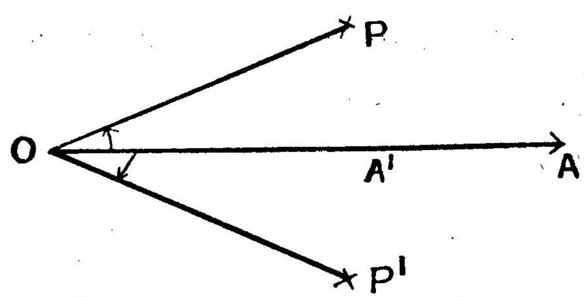


(படம் 18)

O என்ற ஆய ஆதியின் வழியாக X^1OX, Y^1OY என்ற செங்கோண ஆய அச்சுக்களை எடுத்துக் கொள்வோம். OX, OY திசைகளை நோக்கி அளக்கும் தொலைகள் கூட்டெண் ஆயத்தொலைகள் (positive distances) எனவும், OX^1, OY^1 திசைகளை நோக்கி அளக்கும் தொலைகள் குறையெண் ஆயத் தொலைகள் (negative distances) எனவும் கூறப்படுகின்றன. XOY, YOX^1, X^1OY^1, Y^1OX என்ற பகுதிகள் முறையே முதல், இரண்டாவது, மூன்றுவது, நான்காவது வட்ட நாற்கூறு எனச் சொல்லப்படுகின்றன.

முதல் வட்ட நாற்கூறில் P என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். OX, OYக்கு முறையே PM, PN என்ற குத்துக் கோடுகள் வரைவோம். OM என்பது Pன் x ஆயத் தொலை (x co-ordinate) அல்லது Pன் மட்டாயம் (abscissa) என்றும், ON என்பது Pன் y ஆயத்தொலை (y co-ordinate) அல்லது Pயின் குத்தாயம் (ordinate) என்றும் குறிப்பிடுவது மரபு.

4·1·1. கோணங்களின் குறியீடுகள் :

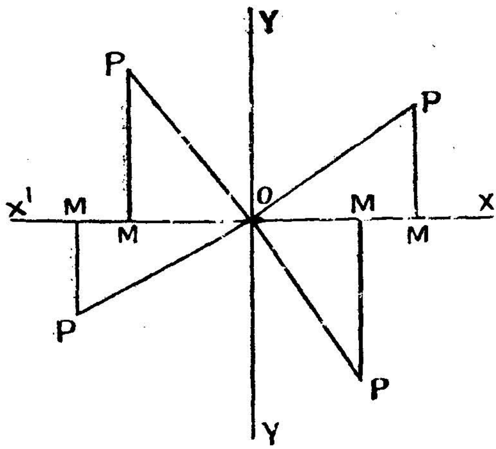


(படம் 19)

OA என்று ஒரு நிலைத்த கோடு எடுத்துக் கொள்வோம். OAன் மேல் OA^1 என்ற பகுதியை, ஒரு சுற்றுங் கோடாக எடுத்துக் கொள்வோம். OA^1, OAவிலிருந்து புறப்பட்டு, இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி (anti clock-wise) OP என்னும் நிலைக்கு வரட்டும் இப்போது கோணம் AOP ஒரு கூட்டுக் கோணம் (Positive angle) எனக் கொள்ளப்படும். (இது மரபு)

OA^1 மறுபடியும், OAவிலிருந்து வலஞ் சுழியாகச் சுற்றி (clock-wise) OP' என்னும் நிலைக்கு வரட்டும். இப்போது கோணம் AOP' ஒரு குறைகோணம் (Negative angle) எனக் கொள்ளப்படும். (இது மரபு)

4·2. எந்த அளவுடைய கோணத்திற்கும் உரிய கோண கணிதத் தகவுகள் :



(படம் 20)

ஒரு கோடு OX என்னும் நிலைத்த கோட்டில் இருந்து இடஞ்சுழியாக θ அளவுள்ள கோணம் சுற்றி ஏதானுமொரு வட்ட நாற்கூறில் OP என்னும் நிலையை அடையட்டும்.

OP முதல் நாற் கூறிலமைந்தால் θ-ஒரு குறுங்கோணம் $(0 < \theta < 90°)$

OP இரண்டாம் நாற்கூறிலமைந்தால் θ ஒரு விரிகோணம் $(90 < \theta < 180°)$

OP மூன்றும் நாற்கூறிலமைந்தால் θ ஒரு பின்கோணம் $180° < \theta < 270°)$

OP நான்காம் நாற்கூறிலமைந்தால் θ வேறு ஒரு பின் கோணம். $270° < \theta > 360°)$

பொதுவாக இப்போது θன் அளவுகள் $0 < \theta < 360°$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருக்கும். Pயிலிருந்து OXக்கு அல்லது OXன் நீட்டலுக்கு PM என்னும் ஒரு குத்துக்கோடு வரைக. இப்போது θ எந்த வட்ட நாற்கூறில் இருப்பினும் θக்கு எதிர்ப் பக்கம் MP எனவும், அடுத்த பக்கம் OM எனவும் கொண்டு θன் கோண கணிதத் தகவுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக் கின்றோம். எப்பொழுதும் OP என்ற செம்பக்கம் கூட்டு மதிப் புடையது என்றே கொள்ளப்படும்.

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM}$$

$$\cot\theta = \frac{OM}{MP}$$

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{MP}$$

படத்தில் இருந்து, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$; $\frac{1}{\sin\theta}=\operatorname{cosec}\theta$ என்பன போன்ற வாய்பாடுகளை நிருபித்தறியலாம். இவ்வாய்பாடுகள் 'θ'ன் எம்மதிப்புக்கும் பொருத்தமாகும்.

θ முதல் வட்ட நாற்கூறில் இருக்கிறதெனக் கொள்வோம். அப்போது θ ஒரு குறுங்கோணம்.

4·2·1. (*a*) OP முதல் வட்டநாற்கூறிலிருந்தால் MP, OM இரண்டும் கூட்டு மதிப்புடையனவாக இருக்கும். அதனுல் எல்லா குறுங்கோணங்களுக்கும் கோண கணிதத் தகவுகளும் கூட்டு மதிப்புடையன.

(b) θ இரண்டாம் வட்ட நாற்கூறில் இருக்கிறதெனக் கொள்வோம். அப்போது θ ஒரு விரிகோணம்.

OP இரண்டாம் வட்ட நாற்கூறில் இருப்பின் MP கூட்டு மதிப்பையும் OM குறை மதிப்பையும் பெறும். அதனுல் $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ மட்டும் கூட்டு மதிப்புடையனவாகவிருக்கும். மற்ற நான்கு கோண கணிதத் தகவுகளும் குறை மதிப்புடையனவாகவிருக்கும்.

(c) θ மூன்ரும் வட்ட நாற்கூறில் இருக்கிறதெனக் கொள் வோம். அப்போது θ ஒரு பின்கோணம்.
$(180^\circ < \theta < 270^\circ)$

OP மூன்ரும் வட்ட நாற்கூறிலிருப்பின் MP, OM இரண்டும் குறை மதிப்புடையனவாகவிருக்கும். அதஞல் $\tan\theta$, $\cot\theta$ இரண்டும் கூட்டெண் மதிப்புடையனவாகவும் மற்ற நான்கு கோண கணிதத் தகவுகளும் குறை மதிப்புடையனவாகவும் இருக்கும்.

(d) θ நான்காம் வட்ட நாற்கூறில் இருக்கிறதெனக்கொள் வோம். அப்போது θ மற்றுமொரு பின்கோணம். $(270 < \theta < 360^\circ)$

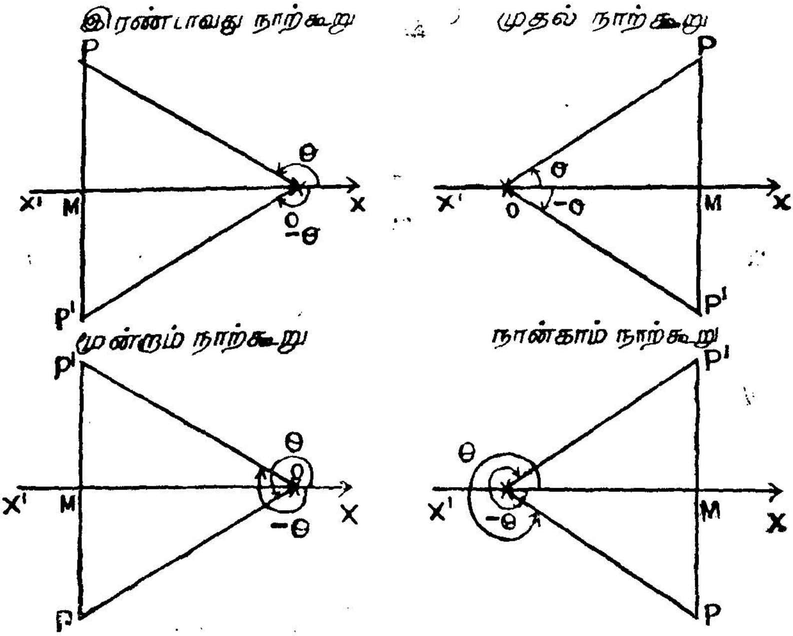
OP நான்காம் வட்ட நாற்கூறிலிருப்பின் OM கூட்டு மதிப்பையுடையதாயும் MP குறை மதிப்புடையதாயும் இருக் கும். அதஞல் $\cos\theta$, $\sec\theta$ இரண்டும் கூட்டு மதிப்புடை யனவாகவும் மற்ற நான்கு கோண கணிதத் தகவுகளும் குறை மதிப்புடையனவாகவும் இருக்கும்.

(e) எந்த ஒரு வட்ட நாற்கூறிலும் தலைகீழ்க்கோண கணிதத் தகவுகள் ஒரே குறியை உடையனவாக இருக்கின்றன. முதல் வட்ட நாற்கூறு தவிர மற்ற மூன்று வட்ட நாற்கூறுகளிலும் முறையே $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$; $\tan\theta$, $\cot\theta$; $\cos\theta$, $\sec\theta$ மதிப்புக்கள் கூட்டுக் குறி உடையனவாக இருக்கின்றன. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ஆக இருப்பதால் $\sin\theta$, $\cos\theta$ இரண்டும் ஒரே குறியை உடையனவாக இருப் பின் $\tan\theta$, $\cot\theta$ இரண்டும் கூட்டெண்ணுகவும், $\sin\theta$, $\cos\theta$ இரண்டும் மாறுபட்ட குறியுடையனவாக இருப்பின் $\tan\theta$, $\cot\theta$, இரண்டும் குறையெண்ணுக வும் இருக்கும். ஆதலால் எல்லா வட்ட நாற் கூறு களிலும் கோண கணிதத் தகவுகளையும் தெரிந்து கொள்ள $\sin\theta$, $\cos\theta$ இரண்டின் தகவுகளைத் தெரிந்து கொண்டால் போதுமானது.

4·2·2. எல்லா வட்ட நாற் கூறுகளிலும் உள்ள கோண கணிதத் தகவுகளின் குறியீடுகளை அடுத்த பக்கத்திலுள்ள வாறு நிரலிடலாம்.

இரண்டாம் வட்ட நாற்கூறு	முதல் வட்ட நாற்கூறு
sin + cos − tan − cot − sec − cosec +	எல்லாம் கூட்டெண்கள்
மூன்றும் வட்ட நாற்கூறு	**நான்காம் வட்ட நாற்கூறு**
sin − cos − tan + cot + sec − cosec −	sin − cos + tan − cot − sec + cosec −

4·3. θ எந்த வட்ட நாற்கூறில் அமையினும் $(-\theta)$ன் கோண கணிதத் தகவுகளை θ-ன் கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டியறிதல் :



(படம் 21)

ஒரு நேர்க்கோடு OXல் இருந்து இடஞ்சுழியாக θ° சுற்றி OP என்னும் நிலையை அடையட்டும். மற்றொரு நேர்க்கோடு OXல் இருந்து வலஞ்சுழியாக θ° சுற்றி OP^1 என்னும் நிலையை அடையட்டும். OP, OP^1 இரண்டையும் சமநீள முள்ளதாக்குக. அப்போது P, P^1ஐச் சேர்க்கும்போது அது OXக்கு குத்துக்கோடாக இருக்கும். அது OXஐ Mல் வெட்டட்டும். எந்த நாற்கூறிலும் முக்கோணம் POP^1ல் OM என்பது $\underline{|POP^1}$ன் இரு சமவெட்டி. ஏனெனில் $\underline{|MOP} = \underline{|MOP^1}$.OM என்ற கோடு PP^1க்கு குத்துக்கோடாக இருக்கிறது.

MP, MP^1 பகுதிகளின் நீளங்களையும் குறிகளையும் கவனித்தால் $MP^1 = -MP$.

$$\therefore \sin(-\theta) = \frac{MP^1}{OP^1} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP^1} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{MP^1}{OM} = -\frac{MP}{OM} = -\tan\theta;$$

$$\cot(-\theta) = \frac{OM}{MP'} = \frac{OM}{-MP} = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{OP'}{OM} = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

$$\text{cosec}(-\theta) = \frac{OP'}{-MP} = \frac{OP}{-MP} = -\text{cosec}\,\theta$$

4·3·1. $\sin(-\theta)$, $\cos(-\theta)$ என்ற இரு கோண கணிதத் தகவுகளைப் படத்தின் மூலம் கண்டபின் மற்ற கோண கணிதத் தகவுகளை அதன் மூலமாகவே பின் வருமாறு நிர்ணயிக்கலாம்.

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

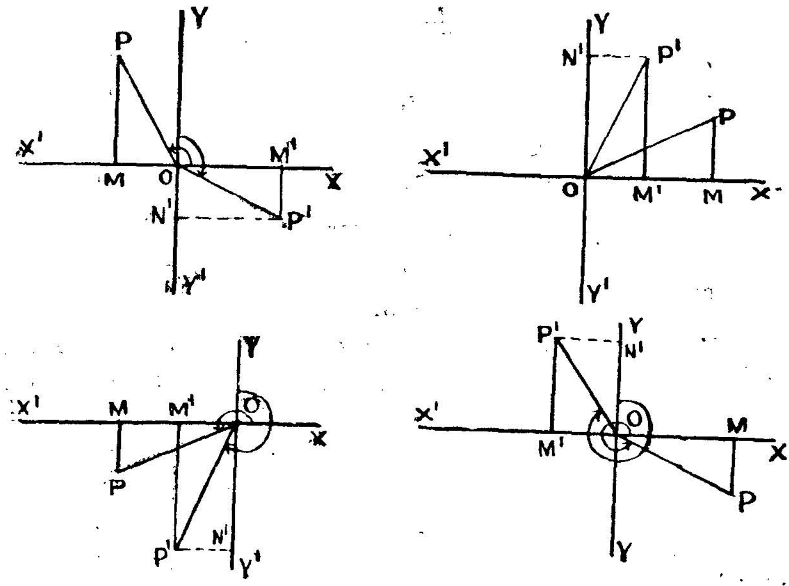
$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\text{cosec}(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\text{cosec}\,\theta$$

4·4. முதல் இரண்டு தகவுகளில் இருந்து மற்ற தகவுகளைக் காண முடியுமாயினும் பின் வரும் பிரிவுகளில் எல்லா கோண கணிதத் தகவுகளின் மதிப்புக்களையும் நேரடியாக விளக்குவோம்.

4.4·1. θ – எந்த நாற் கூறிலமையினும் $(90-\theta)$ன் கோண கணிதத் தகவுகளை θன் கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டி யறிதல்:



(படம் 22)

ஒரு நேர்க்கோடு OXல் இருந்து θ° இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி OP என்னும் நிலையை அடையட்டும். மற்றோர் நேர்க்கோடு OXல் இருந்து 90° இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி பின்னர் θ° வலஞ்சுழியாகச் சுற்றி OP^1 என்னும் நிலையை அடையட்டும். இப்போது $\angle XOP^1 = (90-\theta)$. OP, OP^1 இரண்டையும் சமநீளமுள்ளதாக்குக. P, P^1களில் இருந்து OXக்கு முறையே PM, P^1M^1 என்ற குத்துக்கோடுகள் வரைக. P^1ல் இருந்து OYக்கு P^1N^1 என்ற குத்துக்கோடும் வரைக.

இப்போது $\angle XOP^1 = 90 - \theta = \angle M^1OP^1$

வரைவழிப்படி $\angle XOP = \angle YOP^1$

△ கள் MOP, M^1OP^1 இரண்டிலும்

$$\left\{\begin{array}{l} \angle MOP = \angle P^1ON^1 = \angle M^1P^1O \\ \angle PMO = \angle P^1M^1O = 90^\circ \\ OP = OP^1 \end{array}\right.$$
[ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்]

$\therefore \triangle MOP \equiv \triangle M^1OP^1$

$\therefore$ $OM = M^1P^1$: $MP = OM^1$ (அளவிலும் குறியிலும்)

$$\therefore \sin(90-\theta) = \frac{M^1P^1}{OP^1} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90-\theta) = \frac{OM^1}{OP^1} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

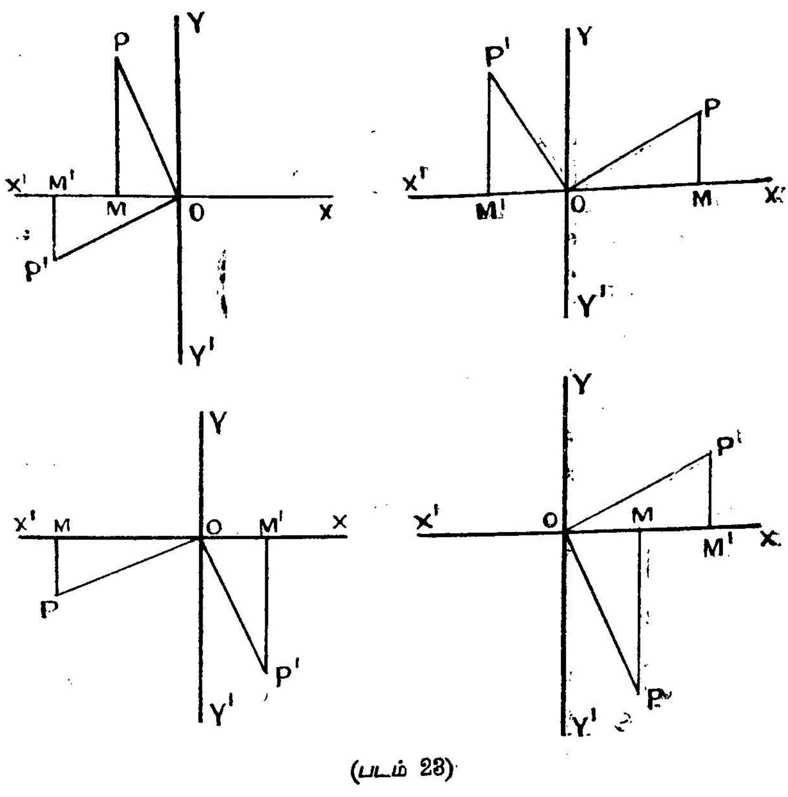
$$\tan(90-\theta) = \frac{M^1P^1}{OM^1} = \frac{OM}{MP} = \cot\theta$$

$$\cot(90-\theta) = \frac{OM^1}{P^1M^1} = \frac{MP}{OM} = \tan\theta$$

$$\sec(90-\theta) = \frac{OP^1}{OM^1} = \frac{OP}{MP} = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90-\theta) = \frac{OP^1}{P^1M^1} = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

4·4·2. θ எந்த நாற்கூறிலமையினும் $(90+\theta)$ன் கோண கணிதத் தகவுகளை θன் கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டியறிதல் ::



(படம் 23)

ஒரு நேர்க்கோடு OXல் இருந்து θ° இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி OP என்னும் நிலையை அடையட்டும். OP மேலும் இடஞ்சுழியாக, 90° சுற்றி OP^1 என்னும் நிலையை அடையட்டும். இப்போது $\underline{|XOP^1} = (90+\theta)$. OP, OP^1 இரண்டையும் சமநீளமுள்ளதாக்குக.

P, P^1 களிலிருந்து XOX^1க்கி முறையே PM, P^1M^1 என்ற குத்துக்கோடுகள் வரைக.

$$\underline{|XOP^1} = 90+\theta = \underline{|MOP^1}$$

இப்போது வரைவழிப்படி

$$\underline{|XOP} = \underline{|YOP^1} \; (= \underline{|O^1PM^1})$$ (ஒன்று விட்ட கோணங்கள்)

$\triangle$கள் MOP, M^1P^1O இரண்டிலும்

$$\underline{|MOP} = \underline{|OP^1M^1}$$

$$\underline{|PMO} = \underline{|P^1M^1O} = 90^\circ$$

$$OP = OP^1$$

$$\therefore \quad \triangle MOP \equiv \triangle M^1P^1O$$

எனவே அளவில் மட்டுமே $MP = OM^1$

அளவிலும் குறியிலும் $OM = M^1P^1$

ஆனால் குறியில் $OM^1 = -MP$

$$\therefore \sin(90+\theta) = \frac{P^1M^1}{OP^1} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90+\theta) = \frac{OM^1}{OP^1} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

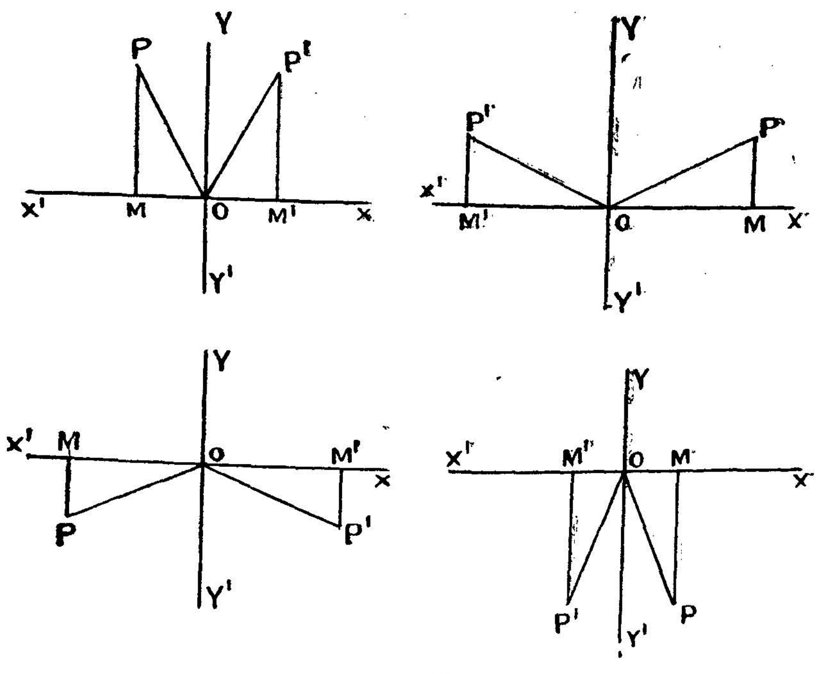
$$\tan(90+\theta) = \frac{P^1M^1}{OM^1} = \frac{OM}{-MP} = -\cot\theta$$

$$\cot(90+\theta) = \frac{OM^1}{P^1M^1} = \frac{-MP}{OM} = -\tan\theta$$

$$\sec(90+\theta)=\frac{OP^1}{OM^1}=\frac{OP}{-MP}=-\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90+\theta)=\frac{OP^1}{P^1M^1}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta.$$

4·4·3. θ எந்த வட்ட நாற் கூறிலமையினும் $(180-\theta)$-ன் கோண கணிதத் தகவுகளை, θ-ன் கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டியறிதல் :



(படம் 24)

ஒரு நேர்க்கோடு OXலிருந்து θ° இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி OP என்னும் நிலையை அடையட்டும். மற்றோர் நேர்க்கோடு OXல் இருந்து 180° இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி பின்னர் θ° வலஞ் சுழியாகச் சுற்றி OP^1 என்னும் நிலையை அடையட்டும். இப்போது $\underline{|XOP^1}=(180-\theta)$. OP, OP^1 இரண்டையும் சம நீளமுள்ளதாக்குக. P, P^1 களில் இருந்து முறையே PM, P^1M^1 என்று இரு செங்குத்துக் கோடுகள் XOX^1க்கு வரைக.

இப்போது $\underline{|XOP^1} = 180 - \theta = \underline{|MOP^1}$

வனைவழிப்படி $\underline{|XOP} = \underline{|X^1OP^1}\ (=\theta)$

$\triangle$ கள் XMP, M^1OP^1 இரண்டிலும்

$\underline{|MOP} = \underline{|MOP^1}$

$\underline{|OMP} = \underline{|OM^1P^1} = 90^\circ$

$OP = OP^1$

$\therefore\ \triangle OMP \equiv \triangle OM^1P^1$

எனவே அளவில் மட்டுமே $OM = OM^1$

அளவிலும் குறியிலும் $MP = M^1P^1$

ஆனல் குறியில் $OM^1 = -OM$

$$\therefore \sin(180-\theta) \equiv \frac{M^1P^1}{OP^1} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos(180-\theta) = \frac{OM^1}{OP^1} = \frac{OM}{OP} = -\cos\theta$$

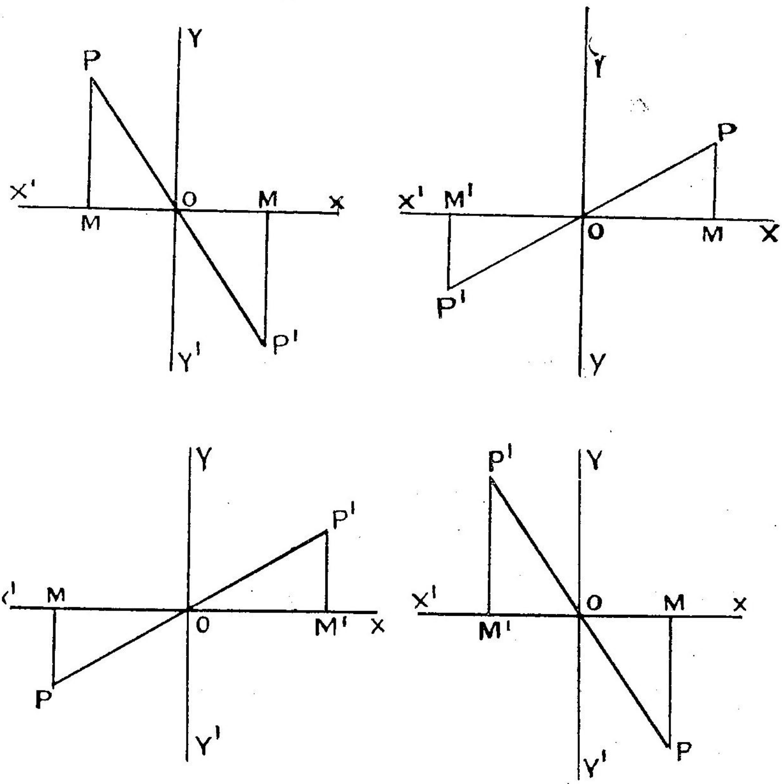
$$\tan(180-\theta) = \frac{M^1P^1}{OM^1} = \frac{MP}{-OM} = -\tan\theta$$

$$\cot(180-\theta) = \frac{OM^1}{M^1P^1} = \frac{-OM}{MP} = -\cot\theta$$

$$\sec(180-\theta) = \frac{OP^1}{OM^1} = \frac{OP}{-OM} = -\sec\theta$$

$$\operatorname{cosec}(180-\theta=)\ \frac{OP^1}{M^1P^1} = \frac{OP}{MP} = \operatorname{cosec}\theta$$

4·4·4. θ எந்த வட்ட நாற் கூறிலமையினும் (180+θ)-ன் கோண கணிதத் தகவுகளை θ-ன் கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டியறிதல் :



(படம் 25)

ஒரு நேர்க்கோடு OX-ல் இருந்து θ° இடஞ் சுழியாகச் சுற்றி OP என்னும் நிலையை அடையட்டும். OP மேலும் இடஞ் சுழியாக 180° சுற்றி OP^1 என்னும் நிலையை அடையட்டும். இப்போது $\underline{|XOP^1} = (180+\theta)$. OP, OP^1 இரண்டையும் சமநீளமுள்ளதாக்குக. P, P^1களிலிருந்து XOX^1-க்கு முறையே PM, P^1M^1 என்ற குத்துக் கோடுகள் வரைக.

இப்போது $\underline{|XOP^1} = (180+\theta) = \underline{|MOP^1}$

வனைவழிப்படி $\underline{|XOP} = \underline{|X^1OP^1}$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$\triangle$ கள் OMP, OM^1P^1 இரண்டிலும்

$$\underline{|MOP} = \underline{|M^1OP^1}$$

$$\underline{|OMP} = \underline{|OM^1P^1} = 90^\circ$$

$$OP = OP^1$$

$$\therefore \quad OMP \equiv \triangle\ OM^1P^1$$

அதனால் இவ்விரு முக்கோணங்களிலும் அளவில் மட்டுமே $OM = OM^1$; $MP = M^1P^1$. ஆனால் குறியில் $OM^1 = -OM$; $M^1P^1 = -MP$.

$$\therefore \sin(180+\theta) = \frac{M^1P^1}{OP^1} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(180+\theta) = \frac{OM^1}{OP^1} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180+\theta) = \frac{M^1P^1}{OM^1} = \frac{-MP}{-OM} = =\tan\theta$$

$$\cot(180+\theta) = \frac{OM^1}{M^1P^1} = \frac{-OM}{-MP} = \cot\theta$$

$$\sec(180+\theta) = \frac{OP^1}{OM^1} = \frac{OP}{-OM} = -\sec\theta$$

$$\text{cosec}(180+\theta) = \frac{OP^1}{M^1P^1} = \frac{OP}{-MP} = -\text{cosec}\,\theta$$

4·4·5. இம்மாதிரியே $(270^\circ \pm \theta)$ன் கோண கணிதத் தகவுகளையும் θ–ன் கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டி எழுதலாம். அல்லது மேலே நிறுவப்பட்ட தொடர்புகளிலிருந்து இவைகளை நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sin(270^\circ-\theta)=\sin(180^\circ+\overline{90^\circ-\theta})$
$=-\sin(90^\circ-\theta)$
$=-\cos\theta$

அவ்வாறே $\cos(270^\circ-\theta)=\cos(180^\circ+\overline{90^\circ-\theta})$
$=-\cos(90^\circ-\theta)$
$=-\sin\theta$

$270^\circ-\theta$க்குரிய மற்ற கோண கணிதத் தகவுகளையும் இவ்வாறே அறியலாம்.

$\tan(270^\circ-\theta)=\cot\theta$
$\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$
$\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$
$\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$

இம்மாதிரியே $\sin(270^\circ+\theta)=\sin(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta})$
$=-\sin(90^\circ+\theta)$
$=-\cos\theta$

இவ்வாறே $\cos(270^\circ+\theta)=\cos(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta})$
$=-\cos(90^\circ+\theta)$
$=-(-\sin\theta)$
$=\sin\theta$

$\tan(270+\theta)=-\cot\theta$
$\cot(270^\circ+\theta)=-\tan\theta$
$\sec(270+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$
$\operatorname{cosec}(270+\theta)=-\sec\theta$

இவ்வாறே $\sin(360^\circ-\theta)=\sin(180^\circ+\overline{180^\circ-\theta})$
$=-\sin(180^\circ-\theta)$
$=-\sin\theta$

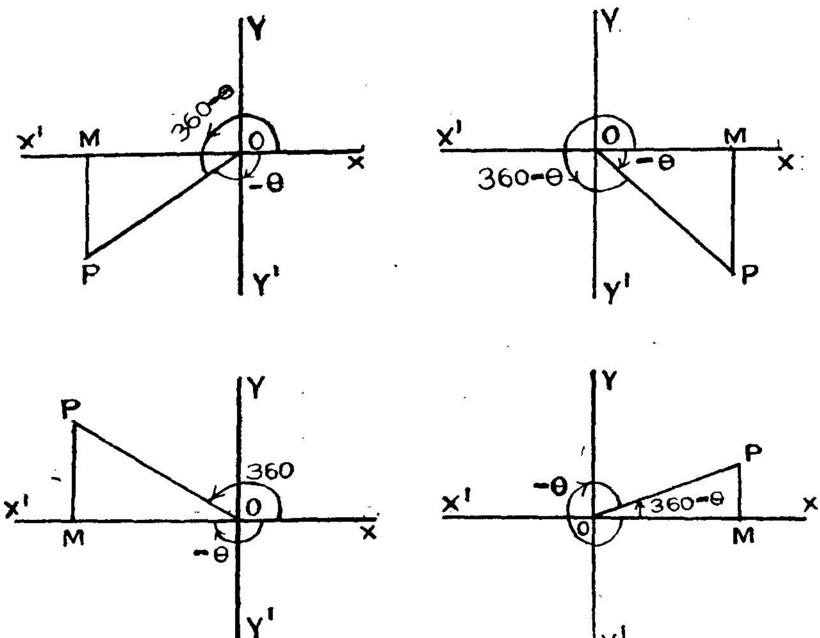
$\cos(360^\circ-\theta)=\cos(180^\circ+\overline{180^\circ-\theta})$
$=-\cos(180^\circ-\theta)$
$=-(-\cos\theta)$
$=\cos\theta$

இம்மாதிரியே $\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

$$\cot(360° - \theta) = -\cot\theta$$
$$\sec(360° - \theta) = \sec\theta$$
$$\operatorname{cosec}(360° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

4·4·6. ஒரு நேர்க்கோடு OXலிருந்து இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி OP என்ற நிலையை அடையட்டும். இதே நிலையை, அந்நேர்க் கோடு OXலிருந்து வலஞ்சுழியாகச் சுற்றியும் அடையலாம்.

அப்போது இடஞ்சுழிச்சுற்றில் $\angle XOP$ அமைகிறது. வலஞ் சுழிச்சுற்றில் $\angle XOP$ அமைகிறது.



(படம் 26)

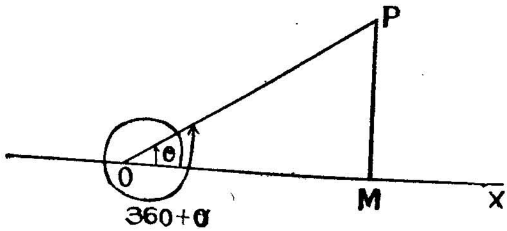
எனவே ஒரு சுழற்கோடு OXலிருந்து OP என்னும் நிலையை இடஞ் சுழியாகச் சுற்றியோ அல்லது வலஞ்சுழியாகச் சுற்றியோ அடையலாம். இதை OPன் வெவ்வேறு நிலைகளுக்குப் படங்களில் காண்க.

எனவே இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி அமைகின்ற $\underline{|MOP}$ன் கோண கணிதத் தகவுகள் வலஞ் சுழியாகச் சுற்றி அமைகின்ற $\underline{|MOP}$ன் கோண கணிதத் தகவுகளுக்குச் சமமாகும்.

$\underline{|MOP} = 360° - \theta$ எனில் $\underline{|MOP} = -\theta$

$$\therefore \sin(360° - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(360° - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(360° - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(360° - \theta) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$$
$$\sec(360° - \theta) = \sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\mathrm{cosec}(360° - \theta) = \mathrm{cosec}(-\theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$$

4·4·7. 460°க்கு மேற்பட்ட கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள்:



(படம் 27)

ஒரு நேர்க்கோடு OXலிருந்து θ இடஞ்சுழியாகச் சுற்றி OP என்னும் நிலையை அடையட்டும். மேலும் அதே நேர்க்கோடு 360° இடஞ்சுழியாகவே சுற்றினல் மறுபடியும் OP என்ற நிலையையே வந்தடைகிறது. இதிலிருந்து $(360°+\theta)$ன் கோண கணிதத் தகவுகள் θன் கோண கணிதத் தகவுகளுக்குச் சமமாயிருக்கின்றன. இதனல் θவுடன் 360°ஐயோ அல்லது 360°ன் மடங்குகளையோ கூட்டினலும் கழித்தாலும் அதன் கோண கணிதத் தகவுகள் θன் கோண கணிதத் தகவுகளுக்குச் சமமாக இருக்கின்றன.

அதாவது θ, $360°+\theta$, $2(360°)+\theta$; $3(360°)+\theta$,........... $n(360°)+\theta$ என்ற கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள் யாவும் θன் கோண கணிதத்தின் தகவுகளுக்குச் சமம் [இங்கு பொதுவாக θன் அளவு கூட்டெண்ணுகவோ, குறையெண்ணுகவோ இருக்கலாம். θன் மதிப்பு $0°$ முதல் $360°$ வரை எந்த மதிப்பையும் பெறலாம்].

எனவே $\sin(n\times 360°+\theta)=\sin\theta$

$$\cos(n\times 360°+\theta)=\cos\theta$$

$$\sin(n\times 360°-\theta)=\sin(-\theta)$$
$$=\sin\theta$$

$$\cos(n\times 360°-\theta)=\cos(-\theta)$$
$$=+\cos\theta$$

இவ்வாறே மற்ற கோண கணிதத் தகவுகளும்.

(எ-கா.) (1) $\sin 780° = \sin(2\times 360°+60°)$

$$= \sin 60°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(எ-கா.) (2) $\sin(-1650°) = -\sin(1650°)$

$$= -\sin(4\times 360°+210°)$$
$$= -\sin 210°$$
$$= -\sin(180°+30°)$$
$$= -(-\sin 30°)$$
$$= \frac{1}{2}$$

(எ-கா.) (3)

$\sin 450° \cos(-1110°)+\sec(750°)\operatorname{cosec}(-690°)$ன் மதிப்பென்ன?

$$\sin 450° = \sin(360+90°)$$
$$= \sin 90°$$
$$= 1$$

$$\cos(-1110^\circ) = \cos 1110^\circ$$
$$= \cos(3 \times 360^\circ + 30^\circ)$$
$$= \cos 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec 750^\circ = \sec(2 \times 360^\circ + 60^\circ)$$
$$= \sec 30^\circ$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}(-690^\circ) = -\operatorname{cosec} 690^\circ$$
$$= -\operatorname{cosec}(2 \times 360^\circ - 30^\circ)$$
$$= -\operatorname{cosec}(-30^\circ)$$
$$= \operatorname{cosec} 30^\circ$$
$$= 2$$

$$\text{மதிப்பு} = 1^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3+8}{2\sqrt{3}}$$
$$= \frac{11}{2\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{6}$$

(எ-கா.) (4)

$\tan 585^\circ \cot 315^\circ + \tan 405^\circ \cot(-675^\circ) = 0$ என நிறுவுக.

$$\tan 585^\circ = \tan(360^\circ + 225^\circ)$$
$$= \tan(225^\circ)$$
$$= \tan(180^\circ + 45^\circ)$$
$$= \tan 45^\circ$$
$$= 1$$

$$\cot 315^\circ = \cot (360^\circ - 45^\circ)$$
$$= -\cot 45^\circ$$
$$= -1$$

$$\tan 405^\circ = \tan (360^\circ + 45^\circ)$$
$$= \tan 45^\circ$$
$$= 1$$

$$\cot (-675^\circ) = -\cot (675^\circ)$$
$$= -\cot (2 \times 360^\circ - 45^\circ)$$
$$= \cot 45^\circ$$
$$= 1$$

$\therefore$ இடது கைப்புற மதிப்பு $= 1 \times -1 + 1 \times 1$
$$= 0$$

(எ-கா.) (5)

$\tan (90^\circ + x) \cot (x - 360^\circ) - \sec (x - 90^\circ) \operatorname{cosec} (x - 540^\circ) = 1$ என நிறுவுக.

$$\tan (90^\circ + x) = -\cot x$$

$$\cot (x - 360^\circ) = \cot [-(360^\circ - x)]$$
$$= -\cot (360^\circ - x)$$
$$= -\cot (-x)$$
$$= \cot x$$

$$\sec (x - 90^\circ) = \sec [-(90^\circ - x)]$$
$$= \sec (90^\circ - x)$$
$$= \operatorname{cosec} x$$

$$\operatorname{cosec} (x - 540^\circ) = \operatorname{cosec} [-(540^\circ - x)]$$
$$= -\operatorname{cosec} (540^\circ - x)$$
$$= -\operatorname{cosec} [360^\circ + \overline{180^\circ - x}]$$
$$= -\operatorname{cosec} (180^\circ - x)$$
$$= \operatorname{cosec} x$$

$\therefore$ இடது கைப்பக்கம் $= (-\cot x)(\cot x) + (\operatorname{cosec} x)(\operatorname{cosec} x)$

$= -\cot^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$

$= 1$ (வ.கை. ப) $[\because 1+\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x]$

(எ-கா.) (6)

A, B, C ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாயின் $\sin\left(\frac{3A+3B+2C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2} = 0$ என நிறுவுக.

ஒரு முக்கோணத்தில் $A+B+C = 180^\circ$

$\therefore 3A+3B+3C = 540^\circ$

$\therefore 3A+3B+2C = 540^\circ - C$

$\therefore \frac{3A+3B+2C}{2} = 270^\circ - \frac{C}{2}$

$$\sin\left(\frac{3A+3B+2C}{2}\right) = \sin\left(270^\circ - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(180^\circ + 90^\circ - \frac{C}{2}\right)$$

$$= -\sin\left(90 - \frac{C}{2}\right)$$

$$= -\cos\frac{C}{2}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{3A+3B+2C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2} = 0$$

பயிற்சி 4

வாய்பாட்டினை உபயோகப்படுத்தாமல் பின்வரும் தகவுகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(1) $\sin 300^\circ$

(2) $\cos 120^\circ$

(3) $\tan 405^\circ$

(4) $\cot(-780^\circ)$

(5) $\sec(-690^\circ)$

(6) $\operatorname{cosec}(1110^\circ)$

(7) $\sec 540^\circ$

(8) $\tan\frac{15\pi}{4}$

(9) $\operatorname{cosec}\frac{29\pi}{6}$

(10) $\cos 30^\circ + \sin 45^\circ + \tan 60^\circ + \sec 120^\circ$

(11) $\sin 600^\circ - \cos(-150^\circ) + \tan 405^\circ + \cot 405^\circ$

(12) $\dfrac{\sin 300^\circ \tan 330^\circ \sec(-420^\circ)}{\cot 135^\circ \cos 210^\circ \operatorname{cosec} 315^\circ}$

சுருக்குக.

(13) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cos(\pi - A)\tan(\pi + A)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right)\sin(\pi - A)\tan(\pi - A)}$

(14) $\dfrac{\sin(180^\circ + A)\cos(90^\circ - A)\tan(270^\circ - A)}{\sec(540^\circ - A)\cos(360^\circ + A)}$

(15) $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ + \theta)} + \dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} - \dfrac{\tan(90^\circ + \theta)}{\cot\theta}$

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(16) $\operatorname{cosec}(90^\circ + A) + \tan A \cos A \cot(90^\circ + A) = \sin(90^\circ + A)$

(17) $\dfrac{\cos(180^\circ - A)\sin(360^\circ - A)\cot(90^\circ + A)}{\tan(180^\circ + A)\cos(-A)\tan(90^\circ - A)} = -\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$

(18) $\cos(180^\circ - A)\tan(A - 450^\circ)\sec(630^\circ + A) = \cot^2 A$

(19) $\dfrac{\sin 135^\circ + \cos 240^\circ}{\sin 135^\circ - \cos 240^\circ} = 3 - 2\sqrt{2}$

(20) $\operatorname{cosec}^2(180^\circ + 2\theta) - \cot^2(180^\circ - 2\theta) = 1$

(21) A, B, C என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாக இருப்பின் கீழ்க் கொடுத்திருப்பவைகளை நிறுவுக.

(i) $\sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B+C}{2}$

(ii) $\cos\dfrac{A}{2} = \sin\dfrac{B+C}{2}$

(iii) $\sin\left(\dfrac{A+2B+3C}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{C-A}{2}\right) = 0$

(iv) $\tan A + \tan(B+C) = 0$

5. இருகோணங்களின் கூட்டுத் தொகை கழிவுத் தொகைக்குரிய கோண கணிதத் தகவுகள்

(Trigonometric ratios of the sum and the difference of two angles) :

5.1. நாம் முன் பகுதியில் $90 \pm \theta$, $180 \pm \theta$ போன்ற கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகளைப் பார்த்தோம். இப்பகுதியில் A+B, A−B என்னும் கோணங்களின் தகவுகளைத் தனித்தனியாக A, Bன் கோண கணிதத் தகவுகளின் சார்புகளாக அறியும் முறைகளையும் அவைகளுக்குரிய வாய்பாடுகளையும் பார்ப்போம். A, B குறுங்கோணங்களாகவும் A+Bம் ஒரு குறுங்கோணமாகவும் கொண்டு பின்வரும் வாய்பாடுகள் வடிவ கணித முறையில் நிறுவப்படுகின்றன ; எனினும் இவை எந்த அளவுடைய கோணங்களுக்கும் பொருந்துவனவாம்.

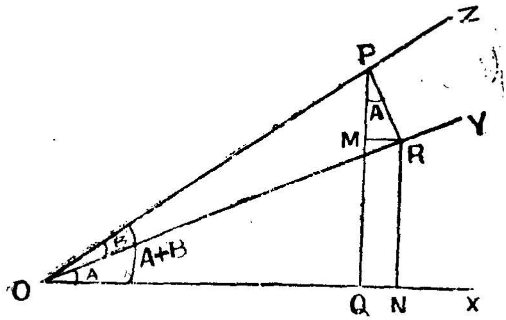
5.2. வாய்பாடுகள் :

(i) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(iii) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

இவைகளை வடிவ கணித முறையில் நிறுவ முற்படுவோம்.



(படம் 28)

$\angle XOY = \angle A$ எனவும், $\angle YOZ = \angle B$ எனவும் கொள்க.

அப்போது $\angle XOY + \angle YOZ = \angle XOZ = \angle (A+B)$

OZல் P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு OX, OYக்கு முறையே PQ, PR என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

Rல் இருந்து OX, PQக்கு முறையே RN, RM என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

இப்போது $\angle PRO = \angle PQO = 90°$

$\because$ OQRP ஒரு வட்ட நாற்கரமாகும்.

$\therefore \angle A = \angle QOR = \angle QPR = \angle MPR$ (QR என்ற வட்டப் பகுதியின் மேலுள்ள கோணங்கள் சமம்)

(i) $\triangle POQ$ல் $\sin (A+B) = \dfrac{PQ}{OP}$

$$= \frac{QM+MP}{OP} \qquad [\because QM = NR]$$

$$= \frac{NR}{OP} + \frac{MP}{OP}$$

$$= \frac{NR}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} + \frac{MP}{PR} \cdot \frac{PR}{OP}$$

$\triangle$கள் PMR, ONR, ORP செங்கோண முக்கோணங்கள்.

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$\therefore \sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ (i)

(ii) $\triangle$POQல்,

$$\cos(A+B) = \frac{OQ}{OP}$$

$$= \frac{ON - QN}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OP} - \frac{MR}{OP} \qquad [\because QN = MR]$$

$$= \frac{ON}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{MR}{PR} \cdot \frac{PR}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \qquad \text{(ii)}$$

(iii) tan (A+B)ன் மதிப்பு காண்பதற்கு முன்பாக, கீழ்க் கண்டவற்றை நிரூபித்துக் கொள்வோம்.

$$\triangle RPM \,|||\, \triangle RON$$

$$\therefore \frac{RM}{RN} = \frac{PM}{ON} = \frac{RP}{RO} = \tan B$$

இப்போது $\triangle$ POQல்

$$\tan(A+B) = \frac{PQ}{OQ}$$

$$= \frac{MQ + PM}{ON - QN}$$

$$= \frac{RN + PM}{ON - MR} \qquad \left[\because \begin{array}{l} QM = RN \\ QN = MR \end{array}\right]$$

$$= \frac{\frac{RN}{ON} + \frac{PM}{ON}}{\frac{ON}{ON} - \frac{MR}{ON}} \qquad \text{(பகுதி விகுதிகளை ONஆல் வகுக்க)}$$

$$= \frac{\frac{RN}{ON} + \frac{PM}{ON}}{1 - \frac{MR}{RN} \cdot \frac{RN}{ON}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan B \tan A}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \qquad \text{(iii)}$$

5·2·1. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ என்னும் இரு வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தியும் $\tan(A+B)$ன் வாய்பாட்டைப் பெறலாம்.

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

(பகுதி விகுதிகளை
$\cos A \cos B$ஆல் வகுக்க)

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

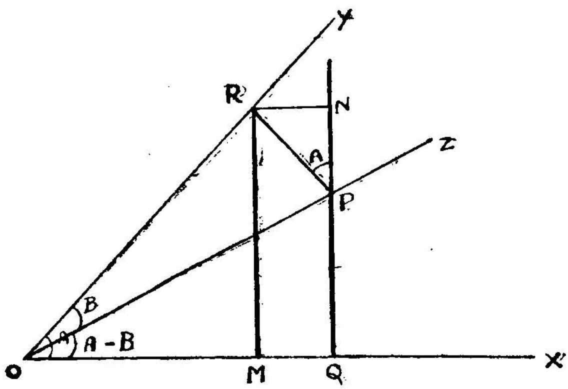
$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

5.3. A, B குறுங்கோணங்களெனவும் $A > B$ எனவும் (அதாவது $A - B = +$) கொண்டு பின்வரும் வாய்பாடுகள் வடிவ கணித முறையில் நிறுவப்படுகின்றன. எனினும் இவை எந்த அளவுடைய கோணங்களுக்கும் பொருந்துவனவாம்.

வாய்பாடுகள் (i) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(iii) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$



(படம் 29)

$\angle XOY = \angle A$ எனவும் $\angle ZOY = \angle B$ எனவும் கொள்க.

அப்போது $\angle XOY - \angle ZOY = \angle XOZ = \angle A - B$

OZல் P என்னும் புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு Pல் இருந்து OX, OYக்கு முறையே PQ, PR என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

Rல் இருந்து OXக்கும் QPன் நீட்டலுக்கும் RM,RN என்ற இரு செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக.

$\angle OQP = \angle PRO = 90^\circ$

∴ OQPR என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம்

∴ $\angle RPN = \angle ROQ = \angle A$

(ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணத்திற்குச் சமம்)

(ii) △OQRல்,

$$\sin(A-B)=\frac{QP}{OP}$$

$$=\frac{QN-PN}{OP}$$

$$=\frac{MR-PN}{OP} \qquad [\because QN=MR]$$

$$=\frac{MR}{OP}-\frac{PN}{OP}$$ [△கள் OMR, OPR, PNR செங்கோண முக்கோணங்கள்

$$=\frac{MR}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{PN}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\therefore \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B \qquad \text{(i)}$$

(ii) △OQPல்,

$$\cos(A-B)=\frac{OQ}{OP}$$

$$=\frac{OM+MQ}{OP}$$

$$=\frac{OM+RN}{OP} \qquad [\because MQ=RN]$$

$$=\frac{OM}{OP}+\frac{RN}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{RN}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\therefore \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \qquad \text{(ii)}$$

(iii) tan (A − B)ன் மதிப்பைக் காண்பதற்கு முன்பு கீழ்க் கண்டவற்றை நிரூபித்துக் கொள்வோம்.

$$\triangle PNR \,|||\, \triangle OMR$$

$$\therefore \frac{PN}{OM} = \frac{NR}{MR} = \frac{PR}{OR} = \tan B$$

$$\tan(A-B) = = \frac{QP}{OQ}$$

$$= \frac{QN - PN}{OM + MQ}$$

$$= \frac{MR - PN}{OM + RN} \qquad \left[\because \begin{array}{l} QN = MR \\ MQ = RN \end{array}\right]$$

பகுதி விகுதிகளை OMஆல் வகுக்க.

$$\tan(A-B) = \frac{\frac{MR}{OM} - \frac{PN}{OM}}{\frac{OM}{OM} + \frac{RN}{OM}}$$

$$= \frac{\frac{MR}{OM} - \frac{PN}{OM}}{1 + \frac{RN}{MR} \cdot \frac{MR}{OM}}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan B \tan A}$$

$$\therefore \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \qquad \text{(iii)}$$

5·3·1. sin (A − B), cos (A − B)ன் வாய்பாடுகளைப் பயன் படுத்தியும் tan (A − B)ன் வாய்பாட்டைப் பெறலாம்.

$$\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

பகுதி விகுதிகளை cos A cos B – ஆல் வகுக்க

$$\tan(A-B) = \frac{\dfrac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B + \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\therefore \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

குறிப்பு : இதுவரை $\lfloor A$, $\lfloor B$, $\lfloor A+B$, $\lfloor A-B$ இவைகளைக் குறுங்கோணம் என்று வைத்துக்கொண்டோம். இவ்வாய்பாடுகள் குறுங்கோணம் அல்லாத கோணங்களுக்கும் பொருத்தமாகும்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$\sin(120° + 210°) = \sin 330° = \sin(360° - 30°)$$

$$= -\sin 30°$$

$$= -\frac{1}{2}$$

வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால்,

$$\sin(120° + 210°) = \sin 120° \cos 210° + \cos 120° \sin 210°$$

$$= \sin 60° (-\cos 30°) + (-\cos 60°)(-\sin 30°)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

இவ்வாறே, மற்ற எந்த மதிப்புள்ள கோணங்களுக்கும் வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, இவ்வாய்பாடுகள் அம் மதிப்புக்கள் பெற்ற கோணங்களுக்கும் பொருந்துமெனச் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

5·4. $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ என நாம் நிறுவினோம்.

எனவே $\cot(A+B) = \dfrac{1}{\tan(A+B)}$

$$= \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B}$$

பகுதி விகுதிகளை $\tan A \tan B$ஆல் வகுக்க.

$$\cot(A+B) = \frac{\dfrac{1 - \tan A \tan B}{\tan A \tan B}}{\dfrac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B}}$$

$$= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$\therefore \cot(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$ எனப் பெறப்படும்.

அவ்வாறே, $\cot(A-B) = \dfrac{1}{\tan(A-B)}$

$$= \frac{1 + \tan A \tan B}{\tan A - \tan B}$$

$$= \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$ எனப் பெறலாம்.

(எ-கா.) (1) $\sin 75°$ - ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°)$$

$$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

(எ-கா.) (2) cos 15°ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$\cos 15° = \cos (45° - 30°)$$
$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

குறிப்பு: $\sin 75° = \sin (90° - 15)$
$$= \cos 15°$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(எ-கா.) (3)

$\cos A = \frac{1}{7}$, $\cos B = \frac{13}{14}$ எனில் $A - B = 60°$ எனக் காட்டுக..

(A, B குறுங்கோணங்களெனக் கொள்க.)

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$= \cos A \cos B + \sqrt{1 - \cos^2 A} . \sqrt{1 - \cos^2 B}$$
$$= \frac{1}{7} . \frac{13}{14} + \sqrt{1 - \frac{1}{49}} . \sqrt{1 - \frac{169}{196}}$$
$$= \frac{13}{7 \times 14} + \frac{\sqrt{48} . \sqrt{27}}{7 \times 14}$$
$$= \frac{13 + 4\sqrt{3} . 3\sqrt{3}}{7 \times 14}$$
$$= \frac{13+36}{7 \times 14}$$
$$= \frac{49}{7 \times 14}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$= \cos 60°$$

அதாவது $\cos (A - B) = \cos 60°$

$\therefore \quad A - B = 60°$

(எ-கா.) (4)

$\sin A - \sin(60^\circ + A) + \sin(120^\circ + A) = 0$ என நிறுவுக.

$$\sin A - \sin(60^\circ + A) + \sin(120^\circ + A)$$
$$= \sin A - \sin(60^\circ + A) + \sin(180^\circ - \overline{60^\circ - A})$$
$$= \sin A - \sin(60^\circ + A) + \sin(60^\circ - A)$$
$$= \sin A - (\sin 60^\circ \cos A + \cos 60^\circ \sin A)$$
$$+ (\sin 60^\circ \cos A - \cos 60^\circ \sin A)$$
$$= \sin A - 2\cos 60^\circ \sin A$$
$$= \sin A - 2.\ \frac{1}{2}\sin A$$
$$= 0$$

(எ-கா.) (5) $\tan A - \tan B = a$; $\cot B - \cot A = b$ எனில் $\cot(A-B) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ என நிறுவுக.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\tan A - \tan B} + \frac{1}{\cot B - \cot A}$$
$$= \frac{1}{\tan A - \tan B} + \frac{1}{\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A}}$$
$$= \frac{1}{\tan A - \tan B} + \frac{1}{\frac{\tan A - \tan B}{\tan A \tan B}}$$
$$= \frac{1}{\tan A - \tan B} + \frac{\tan A \tan B}{\tan A - \tan B}$$
$$= \frac{1 + \tan A \tan B}{\tan A - \tan B}$$
$$= \frac{1}{\tan(A-B)}$$
$$= \cot(A-B)$$

முக்கியமான எடுத்துக் காட்டுகள் :

மூன்று கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை.

(எ-கா.) (1)

sin (A+B+C)ஐ A, B, Cன் கோண கணிதத் தகவுகளாக விரித்துக் காட்டு.

$$\sin(A+B+C) = \sin(A+\overline{B+C})$$

$$= \sin A \cos(B+C) + \cos A \sin(B+C)$$

$$= \sin A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) + \cos A (\sin B \cos C + \cos B \sin C)$$

$$= \sin A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$$

(எ-கா.) (2)

$$\cos(A+B+C) = \cos(A+\overline{B+C})$$

$$= \cos A \cos(B+C) - \sin A \sin(B+C)$$

$$= \cos A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) - \sin A (\sin B \cos C + \cos B \sin C)$$

$$= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C$$

$$= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B$$

(எ-கா.) (3)

tan (A+B+C)ஐ A, B, Cன் கோண கணிதத் தகவுக ளாக விரித்துக்காட்டு.

$$\tan(A+B+C) = \tan(A+\overline{B+C})$$

$$= \frac{\tan A + \tan(B+C)}{1-\tan A \tan(B+C)}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}{1-\tan A.\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}$$

$$= \frac{\tan A(1-\tan B\tan C)+\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan A(\tan B+\tan C)}$$

$$= \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$$

(எ-கா.) (4)

$\sin(A+B)\sin(A-B) \equiv \sin^2 A-\sin^2 B$ என நிறுவுக.

$\sin(A+B)\sin(A-B) = (\sin A\cos B+\cos A\sin B)$
$(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$$= \sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A-\sin^2 B$$

(எ-கா.) (5)

$\cos(A+B)\cos(A-B) \equiv \cos^2 A-\sin^2 B$ என நிறுவுக.

$\cos(A+B)\cos(A-B) = (\cos A\cos B-\sin A\sin B)$
$(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$$= \cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$$

$$= \cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$$

$$= \cos^2 A-\sin^2 B$$

பயிற்சி 5

(1) பின்வரும் கோண கணிதத் தகவுகளைக் கண்டுபிடி.

$\cos 75°$; $\sin 15°$: $\tan 75°$: $\cot 75°$; $\cot 105°$

$\cos 165°$; $\tan 195°$: $\cot 255°$

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(2) (i) $\sin 105° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\tan 105° = -(2+\sqrt{3})$

(3) $\tan 15° + \cot 15° = 4$

(4) $\cos 80° \cos 20° + \sin 80° \sin 20° = \dfrac{1}{2}$

(5) $\tan 36° + \tan 9° = 1 - \tan 36° \tan 9°$

(6) $\sin (45° + A) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\sin A + \cos A)$

(7) $\sin (30° + A) + \sin (30° - A) = \cos A$

(8) $\sin A + \sin (120° + A) + \sin (240° + A) = 0$

(9) $\dfrac{\sin (A+B) + \sin (A-B)}{\cos (A+B) + \cos (A+B)} = \tan A$

(10) $\sin A = \dfrac{3}{5}$; $\cos B = \dfrac{12}{13}$ எனின் $\sin (A - 13)$ன் மதிப்பைக் காண்க. (A, B குறுங்கோணங்கள்)

(11) $\tan A = \dfrac{1}{2}$; $\tan B = \dfrac{1}{3}$ எனின் $\tan (A+B)$ன் மதிப்பைக் காண்க (A, B குறுங்கோணங்கள்).

(12) $\angle A$, $\angle B$ இரண்டும் குறுங்கோணங்கள். $\tan A = \dfrac{5}{6}$; $\tan B = \dfrac{1}{11}$ எனின் $A + B = 45°$ என நிரூபித்துக் காட்டு.

(13) $\tan 3A. \tan 2A. \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$ எனக் காட்டுக. [$\tan 3A = \tan (2A + A)$ எனக் கொள்க]

(14) $A+B=45°$ எனின்

(i) $(\cot A-1)(\cot B-1)=2$ எனவும்

(ii) $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ எனவும் நிறுவுக.

(15) $\tan A+\tan B=a$, $\cot A+\cot B=b$ எனில் $\cot(A+B)$ $=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ என நிறுவுக

(16) A, B, C ஒரு முக்கோணத்திலுள்ள கோணங்களாயிருப்பின் கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$
[$\tan(A+B)=\tan(180-C)=-\tan C$ என்பதைப் பயன்படுத்துக].

(ii) $\tan(A-45°)+\tan(B-60°)+\tan(C-75°)$
$=\tan(A-45°)\tan(B-60°)\tan(C-75°)$

(iii) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$
$+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$

(17) $\cos(A-B)=3\cos(A+B)$ எனின் $\cot A\cot B=2$ என நிறுவுக.

(18) விரித்து எழுது (i) $\sin(A-B+C)$
(ii) $\tan(A+B-C)$
(iii) $\cos(A-B+C)$
(iv) $\tan(A-B-C)$

(19) $\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan B=2+\sqrt{3}$, $\tan C=-\sqrt{3}$ எனின் $\tan(A+B+C)=1$ என நிறுவுக.

(20) $\underline{|A}$, $\underline{|B}$, $\underline{|C}$ குறுங்கோணங்கள். $\tan A=\frac{1}{2}$ $\tan B=\frac{1}{5}$; $\tan C=\frac{1}{8}$ எனின் $A+B+C=45^c$ என நிறுவுக.

6. மடிகோணங்கள்

(Multiple angles) :

6·1. A என்ற ஒரு கோணத்தின் இருமடங்கு (2A) மும் மடங்கு (3A) மதிப்புள்ள கோணத்தின் கோண கணிதத் தகவு களை, A என்ற கோணத்தின் தகவுகளின் சார்பாக நாம் அறியலாம்.

முதலாவதாக,

2A என்ற கோணத்தை எடுத்துக்கொண்டு, பின் வரும் வாய்பாடுகளை இப்போது நிறுவ முற்படுவோம்.

அவ்வாய்பாடுகளாவன :

(*a*) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ (i)

(*b*) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ (ii)

$= 2 \cos^2 A - 1$ (iii)

$= 1 - 2 \sin^2 A$ (iv)

(*c*) $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ (v)

6·1·1. sin (A+B), cos (A+B)க்குரிய வாய்பாடுகளை எடுத்துக்கொண்டு மேலுள்ள வாய்பாடுகளை எளிதில் நிறுவலாம்.

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

A-ம், B-ம் சமமென, அதாவது B = A என ஈடுசெய்ய

$$\sin (A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A$ (i)

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

இங்கு B = A என ஈடு செய்ய

$$\cos(A+A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A \qquad \text{(ii)}$$

$$= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$

$$= 2\cos^2 A - 1 \qquad \text{(iii)}$$

$$= 2(1 - \sin^2 A) - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A \qquad \text{(iv)}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

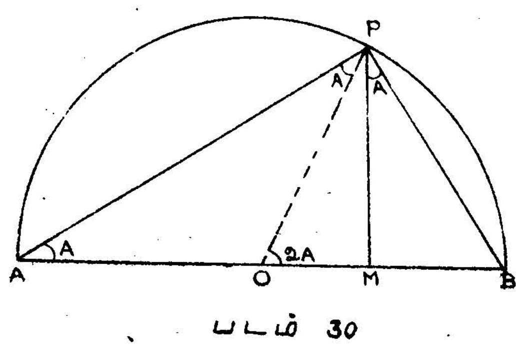
இங்கு B = A என ஈடுசெய்ய

$$\tan(A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

$$= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \qquad \text{(v)}$$

6·2. இவ்வாய்பாடுகளை வடிவ கணித முறையில் நேரடியாகவும் நிறுவலாம்,

A குறுங்கோணம் எனக் கொள்க.



படம் 30

(படம் 30)

APB ஒரு அரை வட்டம்.

AB அதன் விட்டம்.

O வட்டமையம்.

வட்ட வரையின்மேல் P என்னும் ஏதாமொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

Pயிலிருந்து ABக்கு PM என்ற குத்துக் கோடு வரைக.

PA, PB, PO இவற்றை நேர்க்கோடுகளால் இணைக்கவும்.

$\angle PAB = A$ எனக் கொள்க.

$\triangle$ AOPல் OA = OP (அரை விட்டம் அல்லது ஆரம்)

$\therefore \angle PAO = \angle OPA = \angle A$

$\therefore \angle POB = \angle 2A$ ($\triangle$ AOPன் வெளிக்கோணம்)

மேலும், $\angle BPM = 90^\circ - \angle PBM$

$= 90^\circ - \overline{90^\circ - A}$

$= \angle A$

$AM - MB = (AO + OM) - (OB - OM)$

$= 2\,OM$ (ஏனெனில் AO = OB = ஆரம்)

$\triangle$ OMPல், $\sin 2A = \dfrac{MP}{OP}$

$= \dfrac{2\,MP}{2\,OP}$ (பகுதி விகுதிகளை 2ஆல் பெருக்க)

$= \dfrac{2\,MP}{AB}$

$= \dfrac{2MP}{AP} \cdot \dfrac{AP}{AB}$

$= 2 \sin A \cos A$

$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A$ (i)

$\triangle$ OMPல், $\cos 2A = \dfrac{OM}{OP}$

$= \dfrac{2\,OM}{2\,OP}$ (பகுதி விகுதிகளை 2ஆல் பெருக்க)

$= \dfrac{2\,OM}{AB}$

$= \dfrac{AM - MB}{AB}$

$= \dfrac{AM}{AB} - \dfrac{MB}{AB}$

$= \dfrac{AM}{AP} \cdot \dfrac{AP}{AB} - \dfrac{MB}{BP} \cdot \dfrac{BP}{AB}$

$= \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A$

$= \cos^2 A - \sin^2 A$

$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ (ii)

$\cos 2A = \dfrac{OM}{OP}$

$= \dfrac{AM - AO}{OP}$

$= \dfrac{AM - OP}{OP}$

$= \dfrac{AM}{OP} - 1$

$= \dfrac{2AM}{2OP} - 1$

$= \dfrac{2AM}{AB} - 1$

$= \dfrac{2AM}{AP} \cdot \dfrac{AP}{AB} - 1$

$= 2\cos A \cdot \cos A - 1$

$= 2\cos^2 A - 1$

$\therefore \cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ (iii)

$$\cos 2A = \frac{OM}{OP}$$

$$= \frac{OB - BM}{OP}$$

$$= \frac{OB - BM}{OB}$$

$$= 1 - \frac{BM}{OB}$$

$$= 1 - \frac{2\,BM}{2\,OB}$$

$$= 1 - 2\frac{BM}{AB}$$

$$= 1 - 2\frac{BM}{BP} \cdot \frac{BP}{AB}$$

$$= 1 - 2 \sin A \sin A$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\therefore \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \qquad \text{(iv)}$$

$\triangle$ OMPல், $\tan 2A = \frac{MP}{OM}$

$$= \frac{2\,MP}{2\,OM}$$

$$= \frac{2\,MP}{AM - MB}$$

$$= \frac{2\,\frac{MP}{AM}}{1 - \frac{MB}{AM}} \quad \text{(பகுதி விகுதிகளை AMஆல் வகுக்க)}$$

$$= \frac{2\,\frac{MP}{AM}}{1 - \frac{MB}{MP} \cdot \frac{MP}{AM}}$$

$$= \frac{2 \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

$$= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\therefore \quad \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \qquad \text{(v)}$$

6·3. Aன் கோண கணிதத் தகவுகளை $\frac{A}{2}$ன் கோண கணிதத் தகவுகளின் சார்பாக அறிதல்.

$$\sin A = \sin\left(2 \cdot \frac{A}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}$$

$$\cos A = \cos\left(2 \cdot \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$$

$$= 1 - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$\tan A = \tan\left(2 \cdot \frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}}$$

6·4. sin 2A, cos 2Aஐ tan Aன் சார்பாக நிறுவுதல்.

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A} \qquad [\because \cos^2 A+\sin^2 A=1]$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

(பகுதியையும் விகுதியையும் $\cos^2 A$ஆல் வகுக்க)

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\therefore \sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} \qquad \text{(i)}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

(பகுதியையும் விகுதியையும் $\cos^2 A$ஆல் வகுக்க)

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\therefore \cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} \qquad \text{(ii)}$$

6·5. கோணம் 3 Aன் சார்பலன்கள்.

(i) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(iii) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

$$\sin 3A = \sin(2A+A)$$
$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$
$$= 2\sin A \cos A \cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A$$
$$= 2\sin A \cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A$$
$$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$$
$$= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A$$
$$= 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\therefore \quad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \qquad \text{(i)}$$

$$\cos 3A = \cos(2A+A)$$
$$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A \cos A \sin A$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A)$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$$
$$= 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\therefore \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \qquad \text{(ii)}$$

$$\tan 3A = \tan(2A+A)$$

$$\frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\therefore \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \qquad \text{(iii)}$$

(எ-கா.) (i)

$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$ என நிறுவுக.

$$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \frac{2 \sin A \cos A}{1+2\cos^2 A - 1}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{2 \cos^2 A}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \tan A \quad \text{(நி. வே.)}$$

(எ-கா.) (2)

α ஒரு குறுங்கோணம். $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ எனின் $\sin 2\alpha$ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{24}{25}$$

(எ-கா.) (3)

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2 \tan 2\theta$ என நிறுவுக.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$- \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} - \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)^2-(1-\tan\theta)^2}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{4\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= 2\tan 2\theta \qquad \text{(நி. வே.)}$$

(எ-கா) (4)

$2\cos\theta = a+\frac{1}{a}$ எனின் $2\cos 2\theta = a^2+\frac{1}{a_2}$ என நிறுவுக.

$$2\cos\theta = a+\frac{1}{a}$$

$$\therefore (2\cos\theta)^2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2$$

$$4\cos^2\theta = a^2+\frac{1}{a^2}+2$$

$$4\cos^2\theta - 2 = a^2+\frac{1}{a^2}$$

ஆகவே $2(2\cos^2\theta-1) = a^2+\frac{1}{a^2}$

அதாவது $2\cos 2\theta = a^2+\frac{1}{a^2}$

(எ-கா.) (5)

$\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1-\sin\theta$ என நிறுவுக.

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 1-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 1-\sin\theta \qquad \text{(நி. வே.)}$$

குறிப்பு: இவ்வாறே $\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1+\sin\theta$ எனவும் நிறுவலாம்.

(எ-கா.) (6)

$$\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$$ என நிறுவுக.

$$\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}=\frac{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\tan\frac{A}{2}$$ (நி. வே)

(எ-கா.) (7) $\sin A=\frac{3}{5}$ எனின் $\sin 3A$ன் மதிப்பென்ன?

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$$

$$=3\,\frac{3}{5}-4\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$=\frac{9}{5}-4\times\frac{27}{125}$$

$$=\frac{225-108}{125}$$

$$=\frac{117}{125}$$

(எ-கா.) (8) $\frac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\tan 2A$ என நிறுவுக.

$$\frac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\frac{\cos A-(4\cos^3A-3\cos A)}{3\sin A-4\sin^3A-\sin A}$$

$$=\frac{4\cos A-4\cos^3A}{2\sin A-4\sin^3A}$$

$$= \frac{4 \cos A\,(1-\cos^2 A)}{2 \sin A\,(1-2\sin^2 A)}$$

$$= \frac{2 \cos A \sin^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{2 \cos A \sin A}{\cos 2A}$$

$$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A}$$

$= \tan 2A$ (நி. வே.)

(எ–கா.) (9)

$4 \sin \theta \sin (60^\circ - \theta) \sin (60^\circ + \theta) = \sin 3\theta$ என நிறுவுக.

$4 \sin \theta \sin (60^\circ - \theta) \sin (60^\circ + \theta)$

$$= 4\sin \theta\,[\sin 60^\circ \cos \theta - \cos 60^\circ \sin \theta]\,[\sin 60^\circ \cos \theta + \cos 60^\circ \sin \theta]$$

$$= 4 \sin \theta \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta\right]\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta\right]$$

$$= 4 \sin \theta \left[\frac{3}{4} \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta\right]$$

$$= \sin \theta\,[3(1-\sin^2 \theta) - \sin^2 \theta]$$

$$= \sin \theta\,[3 - 4 \sin^2 \theta]$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$= \sin 3\theta$ (நி. வே.)

பயிற்சி 6 (i)

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

(2) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \dfrac{1}{2} \sin 2x$

(3) $\dfrac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = \tan \theta$

(4) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \tan 2x$

(5) $\dfrac{\cot^2 x+1}{\cot^2 x-1}=\sec 2x$

(6) $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x + \cos 2x}=\tan x$

(7) $1 + \tan 2x \tan x = \sec 2x$

(8) $\cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)$

(9) $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x - \sin x} = \dfrac{2 + \sin 2x}{2}$

(10) $\dfrac{1-\cos A}{\sin A} = \tan \dfrac{A}{2}$

(11) $\dfrac{\sec \theta - 1}{\sec \theta} = 2 \sin^2 \dfrac{\theta}{2}$

(12) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}}$

(13) $\dfrac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{n}{2}} = \cos x$

(14) $\sin(\theta+30^\circ)+\cos(\theta+60^\circ)=\cos\theta$

(15) $\tan(45^\circ+\theta)+\tan(45^\circ-\theta)= 2\sec 2\theta$

(16) $\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = \sin 2\theta$

(17) $\dfrac{\cos 3\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta} = 2\cot 2\theta$

(18) $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$

(19) $\sin 4A = 4 \sin A \cos A (\cos^2 A - \sin^2 A)$

(20) $\cos 4A = 8 \sin^4 A - 8 \sin^2 A + 1$

(21) $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

(22) $\cos 6\alpha = 32 \cos^6\alpha - 48 \cos^4\alpha + 18 \cos^2\alpha - 1$

(23) $\cos 5\theta = 16 \cos^5\theta - 20 \cos^3\theta + 5 \cos\theta$

(24) $\cot A = \frac{1}{2}\left(\cot \frac{A}{2} - \tan \frac{A}{2}\right)$

(25) $\operatorname{cosec} x - 2 \cot 2x . \cos x = 2 \sin x$

(26) $\sec^2 x\,(1 + \sec 2x) = 2 \sec 2x$

(27) $\tan 2A = (\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$

(28) $\tan 5\theta - \tan 3\theta - \tan 2\theta = \tan 5\theta \tan 3\theta \tan 2\theta$

($\tan 5\theta = \tan(3\theta + 2\theta)$ எனக் கொண்டு முயற்சி செய்க)

(29) $4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ)$

(30) $\frac{3 \cos A + \cos 3A}{3 \sin A - \sin 3A} = \cot^3 A$

(31) $\frac{\sin 3A + \sin^3 A}{\cos^3 A - \cos 3A} = \cot A$

(32) $\frac{\cos^3 A - \cos 3A}{\cos A} + \frac{\sin^3 A - \sin 3A}{\sin A} = 3$

(33) $\frac{\tan 3A}{\tan A} = \frac{2 \cos 2A + 1}{2 \cos 2A - 1}$

(34) $\frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{\tan 2\theta - \tan\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$

6·6. $\sin 18^\circ$, $\cos 36^\circ$ என்பனவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுதல்.

$\theta = 18^\circ$ என வைத்துக்கொண்டால் $5\theta = 90^\circ$

$\therefore 2\theta = 90^\circ - 3\theta$

$\therefore \sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$

$\sin 2\theta = \cos 3\theta$

$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\therefore\ 4\cos^3\theta - 2\sin\theta\cos\theta - 3\cos\theta = 0$

$\therefore\ \cos\theta\,(4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3) = 0$

ஆனால் $\cos\theta \neq 0$

$\therefore\ 4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$

அதாவது, $4(1-\sin^2\theta) - 2\sin\theta - 3 = 0$

அதாவது, $4 - 4\sin^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$

அதாவது, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore\ \sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

அதாவது $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ அல்லது $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

18° என்பது குறுங்கோணமாதலால் $\sin 18^\circ$ கூட்டெண்ணாகும்.

$\therefore\ \sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. மற்றைய மதிப்பு $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ பொருத்தமுடையதன்று.

$$\cos 36^\circ = \cos(2 \times 18^\circ)$$

$$= 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{8-6+2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

இவைகளில் இருந்து cos 18°, sin 36°ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{16-6+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

மேலும், $\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ}$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

இப்போது $\sin 18^\circ = \sin(90^\circ - 72^\circ)$

$$= \cos 72^\circ$$

எனவே $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

அவ்வாறே $\cos 26^\circ = \cos(90^\circ - 54^\circ)$

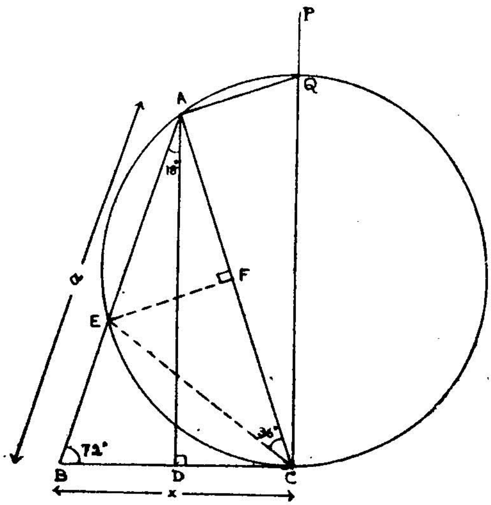
$$= \sin 54^\circ$$

எனவே $\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

6·7. sin 18°, cos 36° என்பவற்றின் மதிப்புக்களை வடிவ கணித முறைப்படி காணுதல்.

$\angle B = \angle C = 72^\circ$ ஆக இருக்கும்படி ABC என்ற ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் (isosceles triangle) வரைக.

அப்போது $\angle A = 36^\circ$. BCயைத் தொடுவரையாக வைத்து A வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் வரைக.



படம் 31

[C வழியாக BCக்கு CP என ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக. A வழியாக, CAக்கு AQ என ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக. CPம் AQம், Q என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். CQஐ விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தால், அது BCஐ Cல் தொட்டு, A வழியாகச் செல்லும்.]

அவ் வட்டம் ABஐ Eல் வெட்டட்டும். $AD \perp BC$ ஆகவும் $EF \perp AC$ ஆகவும் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. $BA = a$ எனவும், $BC = x$ எனவும் வைப்போம்.

$\angle BCE = \angle CAE = 36^\circ$ (மாற்று வட்டப் பகுதியிலுள்ள கோணம்)

$\therefore \triangle BCE$ல் $\angle BEC = 72^\circ$

$\triangle BCE$ல், $BC = EC$

$\triangle CAE$ல் $ED = EA$

$\therefore\ BC = EA = x$

BCம், BEAம் வட்டத்திற்கு முறையே தொடுவரையாகவும் (tangent) வெட்டுவரையாகவும் (secant) இருப்பதால்,

$$BC^2 = BE \cdot BA$$

$$\therefore\ x^2 = (a - x)\, a$$

அதாவது $x^2 + ax - a^2 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{5}\, a}{2}$$

AEC என்ற இரு சமபக்க முக்கோணத்தில் EF, ACக்கு குத்துக் கோடாக இருப்பதால்

$AF = FC = \frac{a}{2}$ $\quad [\because\ AB = AC = a]$

இப்போது $\triangle ADC$ல் $\sin \underline{|\ CAD} = \sin 180^\circ - \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{x}{2}}{a}$

$$= \frac{x}{2a}$$

$$= \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2 \cdot 2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

18° குறுங்கோணமாயிருப்பதால் sin 18° ஒரு கூட்டெண்ணாகும். எனவே குறை மதிப்பைத் தள்ளிவிட

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$\triangle CFE$ல் மேலும் $\cos 36^\circ = \dfrac{CF}{CE}$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{x}$$

$$= \frac{a}{2x}$$

$$= \frac{a}{2\left(\frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{-1 \pm \sqrt{5}}$$

36° குறுங்கோணமாயிருப்பதால் $\cos 36^\circ$ ஒரு கூட்டெண்ணாகும். எனவே குறை மதிப்பை விலக்க

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{-1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

6·8. $\cos 2A = \cos^2 A - 1$

$= 1 - 2\sin^2 A$ எனவும் நாம் அறிவோம்.

ஆகவே $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$

$2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$. இவை பல இடங்களில் நேரடியாக ஈடு செய்யப் பயன்படும்.

எனவே $\cos^2 A = \dfrac{1 + \cos 2A}{2}$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

மேலும் $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$

$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$

என்ற முடிவுகளையும் நாம் பயன்படுத்தலாம். இதிலிருந்தே $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$ என்பது பெறப்படும். இப்போது 45°ன் கணிதத் தகவுகளைக் கொண்டு $\cos 22\frac{1}{2}°$, $\sin 22\frac{1}{2}°$, $\tan 22\frac{1}{2}°$ன் மதிப்புக்களைக் காண்போம்.

$$\cos 22\tfrac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1 + \cos 45°}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

மேலும் $\sin 22\tfrac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

$\tan 22\frac{1^\circ}{2}$ன் மதிப்பை நேரடியாக $\tan 45^\circ$லிருந்தும் அறியலாம்.

$$\tan 45^\circ = \frac{2\tan 22\frac{1}{2}^\circ}{1-\tan^\circ 22\frac{1}{2}^\circ}$$

$\tan 22\frac{1}{2}^\circ = t$ எனக் கொண்டால்

$$1 = \frac{2t}{1-t^2}$$

அதாவது $t^2+2t-1=0$

$\therefore t = -1 \pm \sqrt{1+1}$

அதாவது $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = -1 \pm \sqrt{2}$

ஆனல் $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ குறையெண் மதிப்புப் பெறுதாகையால் $-1-\sqrt{2}$ என்பது விளக்கப்படும். $\therefore \tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$

(எ–கா.) (1)

$\sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin 108^\circ \sin 144^\circ = \frac{5}{16}$ எனக் காட்டுக.

$$\sin 36^\circ . \ \sin 72^\circ . \sin 108^\circ . \sin 144^\circ$$

$$= \sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin (180^\circ - 72^\circ) \sin (180^\circ - 36^\circ)$$

$$= \sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin 72^\circ \sin 36^\circ$$

$$= \sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ$$

$$= \sin^2 36^\circ \sin^2 (90^\circ - 18^\circ)$$

$$= \sin^2 36^\circ \cos^2 18^\circ$$

$$= \left(\frac{1-\cos 72^\circ}{2}\right) \left(\frac{1+\cos 36^\circ}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}{4}$$

$$= \frac{(5-\sqrt{5})\ (5+\sqrt{5})}{64}$$

$$= \frac{20}{64}$$

$$= \frac{5}{16}$$

பயிற்சி 6 (ii)

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) $\sin^2 72° - \sin^2 60° = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$

(2) $\cos^2 36° + \sin^2 18° = \frac{3}{4}$

$\cos 30° = \frac{1}{2}$ என்பதைப் பயன்படுத்தி, பின் வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(3) (1) $\sin 15°$ (2) $\cos 15°$ (3) $\tan 15°$ (4) $\sin 165°$

(4) A, B இரண்டும் குறுங்கோணங்கள். $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$ எனின் $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

7. பெருக்கல் வாய்பாடுகள்

(Product Formulae):

7·1. முன் பகுதியிலே கீழ்வரும் வாய்பாடுகளை நிறுவி இருக்கின்றோம்.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \qquad (1)$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B \qquad (2)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \qquad (3)$$

$$\cos(A-B=\cos A\cos B+\sin A\sin B \qquad (4)$$

1+2 : $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

1 − 2 : $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$

3+4 : $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

3 − 4 : $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$

என்ற புது வாய்பாடுகள் பெறலாம்.

$A+B=C$ என்றும், $A-B=D$ என்றும் கொண்டால்

$$A=\frac{C+D}{2};\quad B=\frac{C-D}{2}$$

அப்போது சற்றுமுன் கண்ட வாய்பாடுகள்,

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\cos D - \cos C = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

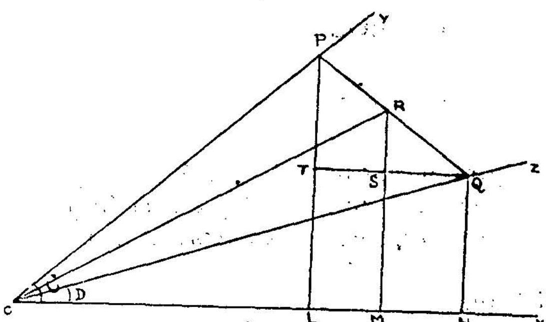
$$= -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$$

என்ற வடிவத்தில் பெறப்படும்.

இவைகளைப் பெருக்கல் வாய்பாடுகளெனக் கொள்வோம்.

7·2. இவ்வாய்பாடுகளை வடிவ கணித முறைப்படியும் நிறுவலாம்.

C, D, C+D இவைகளைக் குறுங்கோணங்களெனக் கொள்வோம்.



படம் 32

$\underline{|XOY} = C$, $\underline{|XOZ} = D$ எனக் கொள்க.

OP = OQ என்ற முறையில், OY, OZல் முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க.

PQஐ இணைத்து, O வழியாக PQக்கு OR என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக.

P, R, Q, வழியே OXக்கு முறையே PL, RM, QN என்ற குத்துக் கோடுகள் வரைக. Qவிலிருந்து PLக்கு QT என்ற செங்குத்துக் கோடுவரைக.

QT, RMஐ Sல் வெட்டட்டும்.

இப்போது $\underline{|POQ} = C - D$ (வரைவழி)

இரு சமபக்க முக்கோணம் QOPல் $OR \perp PQ$ (வரைவழி)

$$\therefore \quad \underline{|POR} = \underline{|ROQ} = \frac{C-D}{2}$$

$$\underline{|XOR} = \underline{|XOZ} + \underline{|ZOR}$$

$$= D + \frac{C-D}{2}$$

$$= \frac{C+D}{2}$$

$$\underline{|SRQ} = \underline{|ORQ} - \underline{|ORS}$$

$$= 90^\circ - (90 - \underline{|ROL})$$

$$= \underline{|ROL}$$

$$= \frac{C+D}{2}$$

R, PQன் மையமாகவும், PL, RM ஒரு போகுக் கோடுகளாகவும் இருப்பதால் $TS = SQ$ எனப் பெறப்படும். மேலும் $RS = \frac{1}{2}PT$ அதாவது $PT = 2\,RS$ எனவும் பெறப்படும்.

படம் 32ல்,

$$PL + QN = PT + TL + QN$$

$$= PT + SM + SM$$

$$= 2\,RS + 2\,SM$$

$$= 2\,(RS + SM)$$

$$= 2\,RM \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\text{(1)} \quad \sin C + \sin D = \frac{PL}{OP} + \frac{QN}{OQ}$$

$$= \frac{PL+QN}{OQ} \qquad [\because OP = OQ]$$

$$= \frac{2\,RM}{OQ} \quad \text{[(i)ன் படி.]}$$

$$= 2\,\frac{RM}{OR} \cdot \frac{OR}{OQ}$$

$$= 2 \sin \angle ROM \cos \angle ROQ$$

$$= 2 \sin \frac{C+D}{2} \cdot \cos \frac{C-D}{2}$$

(2) $$\sin C - \sin D = \frac{PL}{OP} - \frac{QN}{OQ}$$

$$= \frac{PL - QN}{OQ}$$

$$= \frac{PT}{OQ}$$

$$= \frac{2\,RS}{OQ}$$

$$= 2\,\frac{RS}{RQ} \cdot \frac{RQ}{OQ}$$

$$= 2 \cos \angle SRQ \sin \angle ROQ$$

$$= 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

(3) $$\cos C + \cos D = \frac{OL}{OP} + \frac{ON}{OQ}$$

$$= \frac{OL + ON}{OQ}$$

$$= \frac{OM - LM + OM + MN}{OQ}$$

$$= \frac{2\,OM}{OQ} \qquad [\because LM = MN]$$

$$= 2\,\frac{OM}{OR} \cdot \frac{OR}{OQ}$$

$$= 2 \cos \angle ROM \cos \angle ROQ$$

$$= 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$(4)\ \cos D - \cos C = \frac{ON}{OQ} - \frac{OL}{OP}$$

$$= \frac{ON - OL}{OQ}$$

$$= \frac{OM + MN - (OM - LM)}{OQ}$$

$$= \frac{MN + LM}{OQ}$$

$$= \frac{2\ MN}{OQ} \qquad [\because MN = LM]$$

$$= 2 . \frac{SQ}{OQ}$$

$$= 2 . \frac{SQ}{RQ} . \frac{RQ}{OQ}$$

$$= 2 \sin \angle SRQ \sin \angle ROQ$$

$$= 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

7·3. மறுதலை வாய்பாடுகள் :

(1) $2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$

(2) $2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$

(3) $2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$

(4) $2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$

(எ-கா.) (1)

$\dfrac{\sin 4\,A + \sin 2\,A}{\cos 4\,A + \cos 2\,A} = \tan 3\,A$ என நிறுவுக.

$$\frac{\sin 4A + \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \frac{2 \sin \frac{4A+2A}{2} \cos \frac{4A-2A}{2}}{2 \cos \frac{4A+2A}{2} \cos \frac{4A-2A}{2}}$$

$$= \frac{\sin 3\,A \cdot \cos A}{\cos 3\,A \cdot \cos A}$$

$$= \tan 3\,A \qquad \text{(நி. வே.)}$$

(எ–கா.) (2)

$4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$ என நிறுவுக.

$$4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha) = 2 \cos \alpha \, [2 \cos (60^\circ + \alpha) \cdot \cos (60^\circ - \alpha)]$$

$$= 2 \cos \alpha \, [\cos (60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha) + \cos (60^\circ + \alpha - 60^\circ + \alpha)]$$

$$= 2 \cos \alpha \, [\cos 120^\circ + \cos 2\alpha]$$

$$= 2 \cos \alpha \left[-\frac{1}{2} + \cos 2\alpha \right]$$

$$= -\cos \alpha + 2 \cos \alpha \cos 2\alpha$$

$$= -\cos \alpha + \cos (2\alpha + \alpha) + \cos (2\alpha - \alpha)$$

$$= -\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos \alpha$$

$$= \cos 3\alpha$$

(நி. வே.)

(எ–கா.) (3)

$\cos^3 x \sin^2 x = \frac{1}{16}(2 \cos x - \cos 3x - \cos 5x)$ என நிறுவுக.

$$\cos^3 x \sin^2 x = (\cos x \sin x)^2 \cos x$$

$$= \frac{1}{4}(2 \sin x \cos x)^2 \cos x$$

$$= \frac{1}{4} \sin^2 2x \cos x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x \, (\sin 2x \cos x)$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x \, \frac{1}{2} \, [\sin (2x + x) + \sin (2x - x)]$$

$$= \frac{1}{8} \sin 2x \, [\sin 3x + \sin x]$$

$$= \frac{1}{8} [\sin 3x \sin 2x + \sin 2x \sin x]$$

$$= \frac{1}{16}[\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x)+\cos(2x-x)-\cos(2x+x)]$$

$$= \frac{1}{16}[\cos x-\cos 5x+\cos x-\cos 3x]$$

$$= \frac{1}{16}[2\cos x-\cos 5x-\cos 3x]$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos x-\cos 3x-\cos 5x) \quad \text{(நி. வே.)}$$

(எ-கா.) (4) $\sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ = 0$ என நிறுவுக.

$\sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ$

$$= 2\cos\left(\frac{78^\circ+18^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{78^\circ-18^\circ}{2}\right)+\cos 132^\circ$$

$$= 2\cos 48^\circ \sin 30^\circ + \cos(180^\circ-48)^\circ$$

$$= 2\cos 48^\circ \times \frac{1}{2} + \cos 48^\circ$$

$$= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ$$

$$= 0 \quad \text{(நி. வே.)}$$

பயிற்சி 7

கீழ்க் கொடுத்துள்ளவற்றை இரு சைன்களின் (கோசைன்களின்) பெருக்கலாக மாற்றுக.

(1) $\sin 6\theta + \sin 2\theta$

(2) $\sin 6\theta - \sin 2\theta$

(3) $\cos 15\theta + \cos 9\theta$

(4) $\cos 15\theta - \cos 9\theta$

(5) $\sin 70^\circ + \sin 80^\circ$

(6) $\cos 10^\circ - \cos 50^\circ$

(7) $\cos 5A - \cos A$

கீழ்க் கண்டவற்றை உரிய கோண கணிதத் தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை (sum) அல்லது வேற்றுமைத் தொகையாக (difference) மாற்றுக.

(8) $2 \sin 13A \cos 5A$

(9) $2 \cos 7A \cos 3A$

(10) $\sin 10\theta \sin 6\theta$

(11) $\cos 6\theta \sin 3\theta$

கீழ்க் கொடுத்துள்ளவற்றை நிறுவுக.

(12) $\dfrac{\cos \theta - \cos 3\theta}{\sin 3\theta - \sin \theta} = \tan 2\theta$

(13) $\dfrac{\sin 2\theta + \sin 4\theta}{\cos 2\theta - \cos 4\theta} = \cot \theta$

(14) $\dfrac{\sin \theta - \sin 4\theta}{\cos \theta - \cos \theta} = \cot \dfrac{5\theta}{2}$

(15) $\dfrac{\cos (2\alpha - 2\beta) + \cos 3\beta}{\sin (2\alpha - 3\beta) + \sin 3\beta} = \cot \alpha$

(16) $\dfrac{\sin 2A - \sin 2B}{\cos 2A + \cos 2B} = \tan (A - B)$

(17) $\dfrac{\sin 50^\circ - \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 50^\circ} = 1$

(18) $\dfrac{(\sin 4A - \sin 2A)(\cos A - \cos 3A)}{(\cos 4A + \cos 2A)(\sin A + \sin 3A)} = \tan^2 A$

(19) $\dfrac{\cos 7A + \cos 3A - \cos 5A - \cos A}{\sin 7A - \sin 3A - \sin 5A + \sin A} = \cot 2A$

(20) $\dfrac{\sin A \sin 2A + \sin 2A \sin 5A + \sin 3A \sin 10A}{\cos A \sin 2A + \sin 2A \cos 5A - \cos 3A \sin 10A} = -\tan 7A$

(21) $\sin 50^\circ + \cos 80^\circ = \sin 70^\circ$

(22) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$

(23) $\sin 78 - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ = 0$

(24) $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{8\pi}{15}+\cos\frac{16\pi}{15}=\frac{1}{2}$

(25) $4(\cos 6^\circ+\sin 24^\circ)=\sqrt{3}+\sqrt{15}$

(26) $\sin 3\theta+\sin 7\theta+\sin 10\theta=4\sin 5\theta\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$

(27) $\cos 2\theta+\cos 6\theta+\cos 10\theta+\cos 14\theta$
$=4\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta$

(28) $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2=4\cos^2\frac{A+B}{2}$

(29) $(\cos 2A+\cos 2B)^2+(\sin 2A+\sin 2B)^2=4\cos^2(A-B)$

(30) $\cos 12^\circ+\cos 84^\circ+\cos 132^\circ+\cos 156^\circ=-\frac{1}{2}$

(31) $\frac{\sin 3\theta+\cos 3\theta}{\sin 3\theta-\cos 3\theta}=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1+2\sin 2\theta}{1-2\sin 2\theta}\right)$

(32) $\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}+A\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}+A\right)=0$

(33) $\cos A+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+A\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+A\right)=0$

(34) $\cos^2\theta+\cos^2(60^\circ+\theta)+\cos^2(60^\circ-\theta)=\frac{3}{2}$

(35) $\sin^2\theta+\sin(120^\circ+\theta)+\sin^2(120-\theta)=\frac{3}{2}$

(36) $4\cos 18^\circ\cos 42^\circ\cos 78^\circ=\cos 54^\circ$

(37) $\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=\frac{3}{16}$

(38) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$

(39) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{8}$

(40) $\cos 55^\circ\cos 65^\circ+\cos 65^\circ\cos 175^\circ$
$+\cos 175^\circ\cos 55^\circ=-\frac{3}{4}$

8. முற்றொருமைகள்

(Identities):

8·1. A, B, C என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களாயின் $A+B+C=180°$ என்பதை நாம் அறிவோம். இவ்வுண்மையைக் கொண்டு பல்வகை முற்றொருமைகளை நிறுவலாம்.

$$A+B+C=180°$$

$$\therefore B+C=180°-A$$

$$\therefore \sin(B+C)=\sin A$$

இவ்வாறே $\cos(B+C)=-\cos A$
$\tan(B+C)=-\tan A$ என நிறுவலாம்.

இதுபோலவே (C+A), (A+C)க்கு உரிய கோண கணிதத் தகவுச் சமன்பாடுகள் பெறுக.

$$\frac{A+B+C}{2}=90°$$

$$\therefore \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90°-\frac{C}{2}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)$$

$$\therefore \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$$

இவ்வாறே $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ என நிறுவலாம்.

இது போலவே $\frac{C+A}{2}$, $\frac{B+C}{2}$-க்கு உரிய கோண கணிதத் தகவுச் சமன்பாடுகள் பெறுக.

(எ-கா.) (1) $A+B+C=180^\circ$ ஆனால், $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ என நிறுவுக.

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C$$
$$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$
$$=2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]$$
$$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$
$$=2\sin C(2\sin A\sin B)$$
$$=4\sin A\sin B\sin C$$ (நி. வே.)

(எ-கா.) (2) A, B, C என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாயின்

$$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

என நிறுவுக.

முக்கோணத்தில் $A+B+C=180^\circ$

$$\sin A-\sin B+\sin C=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(நி. வே.)

(எ-கா.) (3) A, B, C என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாயின்

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{C}\sin\frac{C}{2}$$

என நிறுவுக.

முக்கோணத்தில் $A+B+C=180°$

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(எ-கா.) (4) $A+B+C=180°$ என்றிருப்பின் $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$ என நிறுவுக.

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[-2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[(-2\cos C)\left\{\cos(A-B) - \cos C\right\}\right] - \frac{1}{2}$$

$= 1 - \cos C\,[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

$= 1 - \cos C\,[2\cos A\cos B]$

$= 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$

(எ–கா.) (5) ஒரு முக்கோணத்தில் $\tan A + \tan B + \tan C$ $= \tan A \tan B \tan C$ எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணத்தில் $A + B + C = 180°$

$$A + B = 180° - C$$

$$\therefore \quad \tan(A+B) = \tan(180° - C)$$

$$\therefore \quad \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$\therefore$ $\tan A + \tan B = -\tan C\,(1 - \tan A.\tan B)$

$\therefore$ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(எ–கா.) (6) ஒரு முக்கோணத்தில் $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}$ $+\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ என நிறுவுக.

$$\text{முக்கோணத்தில் } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$$

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \tan\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\cot\frac{A}{2}$$

அதாவது $$\frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

இருபுறமும் $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ ஆல் பெருக்க

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

(எ-கா.) (6)

$A+B+C=0$ என்றிருக்குமாயின்,

$$\cos A+\cos B-\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

என நிறுவுக.

$$\cos A+\cos B-\cos C=(\cos A+\cos B)-\cos C$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)$$

$$=1+\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+2\cos\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(எ-கா.) (7)

$A+B+C=90^\circ$ என்றிருக்குமாயின்,

$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=1-\cos A\cos B.\sin C$ என நிறுவுக.

$$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sin^2 A+(\sin^2 B-\sin^2 C)$$
$$=\sin^2 A+\sin(B+C)\sin(B-C)$$
$$=\sin^2 A+\sin(90^\circ-A)\sin(B-C)$$
$$=1-\cos^2 A+\cos A\sin(B-C)$$
$$=1-\cos A[\sin(B+C)-\sin(B-C)]$$
$$=1-\cos A.\ 2\cos B\sin C$$
$$=1-2\cos A\cos B\sin C.$$

பயிற்சி

$A+B+C=180^\circ$ என்றிருக்குமாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

I. (1) $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C$

(2) $\sin 2A-\sin 2B-\sin 2C=-4\sin A\cos B\cos C$

(3) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$

(4) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$

(5) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(6) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(7) $\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(8) $\cos A-\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$

(9) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$

(10) $\sin^2 A+\sin^2 B\ \sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

(11) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\cos C$

(12) $\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C=2\cos A\sin B\sin C-1$

(13) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(14) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$$=2\left[1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]$$

(15) $\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$

(16) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(17) $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

(18) $\tan 4A+\tan 4B+\tan 4C=\tan 4A\tan 4B\tan 4C$

II. $A+B+C=0$ என்றிருக்குமாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(19) $\sin A+\sin B+\sin C=-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(20) $\cos A+\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$

III. $A+B+C=90^\circ$ என்றிருக்குமாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(21) $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=1+4\cos\frac{\pi+2A}{4}\cos\frac{\pi+2B}{4}\cos\frac{\pi+2C}{4}$$

(22) $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=4\cos\frac{\pi-2A}{4}\cos\frac{\pi-2B}{4}\cos\frac{\pi-2C}{4}$$

9. முக்கோணத்தின் பண்புகள்

(Properties of Triangles):

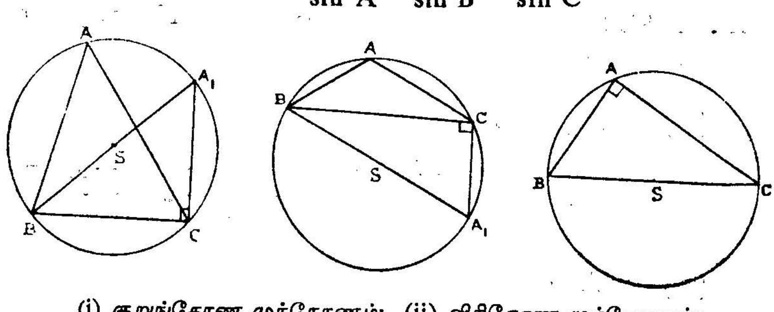
9·1. △ ABCல் பக்கங்கள் BC, CA, AB ஐ முறையே a, b, c என்றும் இப் பக்கங்களுக்கு எதிரில் உள்ள கோணங்களை முறையே A, B, C, என்றும் குறிப்பிடுவது மரபு. அது போலவே பக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $(a+b+c)$ஐ $2s$ என்றும் சுற்று வட்டத்தின் ஆரத்தை R என்றும் உள்தொடு வட்டத்தின் ஆரத்தை r என்றும் பரப்பளவை △ அல்லது S என்றும் குறிப்பிடுகின்றோம். நாம் பரப்பளவை △ என்றே இந்நூலில் குறிப்பிடுவோம்.

9·2. முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் கோணங்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகள் :

பக்கம்-நெடுக்கைத் தொடர்பு

(side-sine relation)

ஒரு முக்கோணத்தில் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C} = 2R$



(i) குறுங்கோண முக்கோணம்; (ii) விரிகோண முக்கோணம்;
(iii) செங்கோண முக்கோணம்

(படம் 33)

S என்னும் புள்ளி $\triangle ABC$ன் சுற்றுவட்ட மையம். BS மீண்டும் வட்டவரையை A_1ல் வெட்டட்டும். ஆகவே BA_1 வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். R சுற்று வட்ட ஆரமாகும்; $BA_1 = 2R$

(i) $\underline{|A}$ குறுங்கோணம்.

$\underline{|BAC} = \underline{|BA_1C}$ (ஒரே வட்டத் துண்டின் மேலுள்ளன)

$$\sin A = \sin \underline{|BA_1C} = \frac{BC}{BA_1} \quad (\because \angle BCA_1 = 90^\circ)$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

(ii) $\underline{|A}$ விரிகோணம்.

$A\,B\,A_1\,C$ வட்ட நாற்கரம்.

$$\therefore BA_1C = \pi - A$$

$$\therefore \sin(\pi - A) = \frac{BC}{BA_1} \quad (\because \angle BCA_1 = 90^\circ)$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

(iii) $\underline{|A}$ செங்கோணம்.

$$\underline{|A} = 90^\circ$$

$$\therefore \sin A = 1$$

$$BC = 2R \cdot 1$$

அதாவது $a = 2R \cdot \sin A$

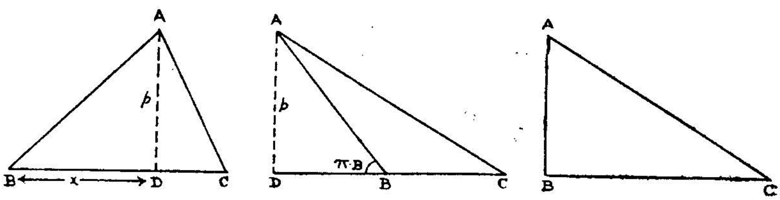
$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

இது போலவே $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$ என நிறுவலாம்.

ஆகவே $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

இத்தொடர்பு, குறுங்கோண, விரிகோண, செங்கோண முக்கோணங்கள் மூன்றுக்கும் பொருத்தமானது.

9·3. பக்கம் - கிடக்கைத் தொடர்பு : (Side - Cosine relation)



(i) குறுங்கோண முக்கோணம் (ii) விரிகோண முக்கோணம் (iii) செங்கோண முக்கோணம்

(படம் 34)

ABC ஒரு முக்கோணம்.

Aயிலிருந்து BCக்கு அல்லது CBன் நீட்டலுக்கு AD என்ற குத்துக்கோடு வரைக. $AD = p$ எனவும் $BD = x$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) $\underline{|B}$ குறுங்கோணம்.

$x = BD = c \cos B$

$DC = (a - x)$

செங்கோண முக்கோணம் ACDல் $b^2 = p^2 + (a-x)^2$

மேலும் செங்கோண முக்கோணம் ADBல் $c^2 = p^2 + x^2$ (i)

$\therefore\ b^2 = p^2 + x^2 + a^2 - 2ax$

$= c^2 + a^2 - 2a\, c \cos B$ [(i)ன்படி]

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

(ii) $\underline{|B}$ விரிகோணம்.

$$x = BD = c \cos(\pi - B)$$
$$= -c \cos B$$
$$DC = a + x$$

செங்கோண முக்கோணம் ACDல் $b^2 = p^2 + (a+x)^2$

மேலும் செங்கோண முக்கோணம் ADBல் $c^2 = p^2 + x^2$ (i)

$$\therefore\ b^2 = p^2 + (a+x)^2$$
$$= p^2 + x^2 + a^2 + 2ax$$
$$= c^2 + a^2 + 2a(-c \cos B) \qquad [(i)\text{ன்படி}]$$
$$\therefore\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

(iii) $\angle B$ செங்கோணம்.

இங்கு Dம் Bம் ஒன்றுபடும்.

ஆனால் $\angle B = 90^\circ$

$\therefore\ \cos B = 0;$

மேலும், $b^2 = c^2 + a^2$

எனவே $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ எனவும் கொள்ளலாம்.

$\therefore$ முக்கோணத்தில் $\angle B$ எம்மதிப்புடையதாய் இருப்பினும் $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ எனப் பொதுவாகக் கூறலாம்.

இதுபோலவே $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ என நிறுவலாம்.

9·3·1 இதிலிருந்து $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

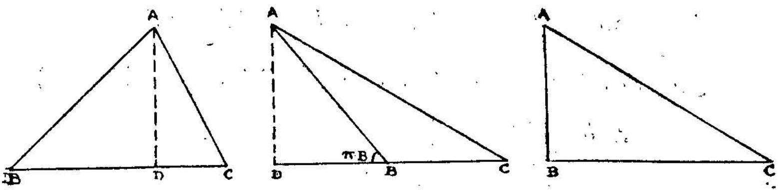
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$ என்ற தொடர்புகள் பெறப்படும்.

9·4. △ ABCல்

$a = b \cos C + c \cos B$

$b = c \cos A + a \cos C$

$c = a \cos B + b \cos A$ என நிறுவுதல்.



(i) குறுங்கோண முக்கோணம் (ii) விரிகோண முக்கோணம்
(iii) செங்கோண முக்கோணம்
(படம் 35)

△ ABCல் Aயிலிருந்து BCக்கு அல்லது CBன் நீட்டலுக்கு AD என்ற குத்துக்கோடு வரைக.

(i) $\underline{|B}$ குறுங்கோணம்.

$a = BC$

$= BD + DC$

$= c \cos B + b \cos C$ (ABD, ACD என்ற செங்கோண முக்கோணங்களிலிருந்து)

$\therefore\ a = b \cos C + c \cos B$

(ii) $\underline{|B}$ விரிகோணம்.

$a = BC$

$= DC - DB$

$= b \cos C - c \cos (\pi - B)$ (ABD, ACD என்ற செங்கோண முக்கோணங்களிலிருந்து)

$= b \cos C + c \cos B$

$\therefore\ a = b \cos C + c \cos B$

(iii) $\underline{|B}$ செங்கோணம்.

$$a = BC$$

$$= b \cos C$$

$$= b \cos C + c \cos B \qquad [\because \cos B = \cos 90^\circ = 0]$$

$\therefore$ $a = b \cos C + c \cos B$ என மற்றிரண்டு முடிவுகளோடு இணைத்து பொதுமைப்படுத்தி விடலாம்.

இம்மாதிரியே $b = c \cos A + a \cos B$

$c = a \cos B + b \cos A$ என நிறுவலாம்.

குறிப்பு (i) $\triangle$ ABCல் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

ஆகவே $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \quad a = 2R \sin (180 - \overline{B+C})$$

$$= 2R \sin (B+C)$$

$$= 2R \sin B \cos C + 2R \cos B \sin C$$

$$= b \cos C + c \cos B \left(\because \frac{b}{\sin B} = 2R = \frac{c}{\sin C} \right)$$

என்ற முறையிலும் நிறுவலாம்.

$$\therefore \quad a = b \cos C + c \cos B$$

குறிப்பு (2)

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \qquad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore\ b\cos C + c\cos B = b.\ \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c\,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a}$$

$$= \frac{2a^2}{2a}$$

$= a$ என்ற முறையிலும் நிறுவலாம்.

$$\therefore\ a = b\cos C + c\cos B$$

9·5. $a+b+c=2s$ என நாம் கொள்வது மரபு.

$$\therefore\ b+c-a = a+b+c-2a$$

$$= 2s-2a$$

$$c+a-b = a+b+c-2b$$

$$= 2s-2b$$

$$a+b-c = a+b+c-2c$$

$= 2s-2c$. என்ற தொடர்புகள் முக்கியமானவை. பின்னர் அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படும்,

9·5·1. முக்கோணத்திலுள்ள ஒரு கோணத்தின் நெடுக்கையை முப்பக்கங்களின் சார்பாகக் காணுதல் :

முன்னர் $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ என 9·3·1 ல் நிறுவப்பட்டது.

ஆனல் $\sin^2 A = 1-\cos^2 A$

$$\therefore\ \sin^2 A = 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

$$= \left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc-\overline{b^2+c^2-a^2}}{2bc}\right)$$

$$= \left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

$$\therefore \sin A = \pm \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

கோணம் A, 180°ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதனுல் கூட்டுக் குறி மட்டுமே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். குறையெண் குறி விலக்கப்படும்.

$$\therefore \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

இவ்வாறே $\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

எனப் பெறப்படும்.

9·5·2. முக்கோணத்திலுள்ள ஒரு கோணப் பாதியின் கோண கணிதத் தகவுகளைப் பக்கங்களின் சார்பாகக் கண்டறிதல் :

(i) கோணப்பாதியின் நெடுக்கை:
(sines of Half-angles)

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ என நிறுவப்பட்ட தொடர்பைப் பயன்படுத்துவோம்.

ஆனல் $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$ என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}\right]$$

$$= \frac{(2s-2b)(2s-2c)}{4bc}$$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$\frac{A}{2}$ குறுங்கோணமாக இருத்தலினல் குறைக் குறியை விலக்கிவிட $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ எனப் பெறப்படும்.

இம்மாதிரியே $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ என நிறுவலாம்.

9·5·3 (2) கோணப் பாதியின் கிடக்கை :
(Cosines of half - angles)

$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$ என நிறுவப்பட்டதிலிருந்து

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}[1 + \cos A]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

$$= \frac{2s(2s-2a)}{4bc}$$

$$= \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$\frac{A}{2}$ குறுங்கோணமாக இருத்தலினால் குறைக் குறியை விலக்கிவிட $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ எனப் பெறப் படும்.

இவ்வாறே $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$

$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ என நிறுவலாம்.

9·5·4. (3) கோணப்பாதியின் இருக்கை :
(Tangent of half - angles)

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

இம்மாதிரியே $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$ என அறிவோம்.

இவைகளைப் பின் காட்டியபடி நேரடியாகவும் நிறுவலாம்.

$\cos A = \dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$ என அறிவோம்.

$\tan\frac{A}{2} = t$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\therefore \frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{(1+t^2)+(1-t^2)} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}$$

$$\therefore t^2 = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c+a)(b+c-a)}$$

$$= \frac{2(s-b)\ 2(s-c)}{2s \cdot 2(s-a)}$$

$$= \frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}$$

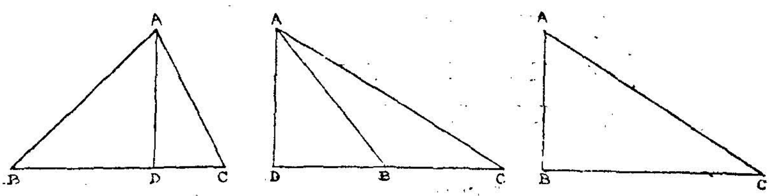
$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}}$$

$\frac{A}{2}$ குறுங்கோணமாதலின் குறைக் குறியை விலக்க,

$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}}$ எனப் பெறப்படும்.

இவ்வாறே cos B, cos Cன் மதிப்புக்களைக் கொண்டு $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ ன் மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

9·6. முக்கோணத்தின் பரப்பு : வாய்பாடு கண்டு கணக்கிடல். (Area of a triangle – calculation)



(i) குறுங்கோண முக்கோணம். (ii) விரிகோண முக்கோணம்
(iii) செங்கோண முக்கோணம்
(படம் 36)

ABC ஒரு முக்கோணம்,

Aயிலிருந்து BCக்கு AD என்ற குத்துக்கோடு வரைக.

$\underline{|B}$ குறுங்கோணமாயிருப்பின், AD, BCஐ Bக்கும் Cக்கும் இடையே சந்திக்கும்.

$\underline{|B}$ விரிகோணமாயின், AD, CBன் நீட்டலைச் சந்திக்கும்.

$\underline{|B}$ செங்கோணமாயின் Dம் Bம் ஒன்றும். இப்போது

$\triangle$ ABCன் பரப்பு $\triangle = \frac{1}{2}$ BC . AD

ஆனால் $AD = AB \sin B$ (படம் 36 (i))

அல்லது $AD = AB \sin (180^\circ - B)$ (படம் 36 (ii))

$= AC \sin C$

$\therefore AD = c \sin B$

அல்லது $AD = c \sin (180^\circ - B)$

$= b \sin C$

$\therefore \triangle = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B$ [B = 90° ஆனால் $\triangle = \frac{1}{2} ac$

$= \frac{1}{2} ab \sin C$ $= \frac{1}{2} ac \sin B$ எனப் பொது மைப் படுத்தலாம்.]

$\therefore \triangle = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin B$

(ii) $\triangle = \frac{1}{2} bc \sin A$

$= \frac{1}{2} bc . \frac{2}{bc} \sqrt{s (s-a) (s-b) (s-c)}$

$= \sqrt{s (s-a) (s-b) (s-c)}$

$\therefore \triangle = \sqrt{s (s-a) (s-b) (s-c)}$

(iii) $\frac{a}{\sin A} = 2 R$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து

$\sin A = \frac{a}{2R}$

$\therefore \triangle = \frac{1}{2} bc \sin A$

$= \frac{1}{2} bc \frac{a}{2 R}$

$= \frac{abc}{4R}$

$\therefore \triangle = \frac{abc}{4R}$

மேலும் $R = \frac{abc}{4\triangle}$ என்பதும் இதனல் அறியப்படும்.

9·6·1. பக்கம் – இருக்கைத் தொடர்பு :
(Side - tangent relation)

நேப்பியர் இருக்கை வாய்பாடு(Napier's tangent formula):

ஒரு முக்கோணத்தில்,

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$ என நிறுவுக.

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin B+2R\sin C}$$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

$$\therefore \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$ (நி. வே)

(எ-கா.) (1) ஒரு முக்கோணத்தில் $a \sin (B-C)+b \sin (C-A)+C \sin (A-B)=0$ என நிறுவுக.

இடதுகைப்பக்கம் $= a \sin (B-C)+b \sin (C-A)+C \sin(A-B)$

$$=2R\,[\sin A\,(\sin B \cos C-\cos B \sin C)$$
$$+\sin B\,(\sin C \cos A-\cos C \sin A)$$
$$+\sin C\,(\sin A \cos B-\cos A \sin B)]$$
$$=0$$

(எ-கா.) (2) ஒரு முக்கோணத்தில் $a\,(b \cos C-c\cos B)=b^2-c^2$ என நிறுவுக.

இங்கு cos C, cos Bக்கு ஈடுசெய்ய,

$$a\,(b \cos C-c \cos B)=ab\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}-ac\frac{(c^2+a^2-b^2)}{2ca}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2}{2}$$

$$=b^2-c^2$$ (நி. வே.)

(எ-கா.) (3)

ஒரு முக்கோணத்தில்,

$a\,(b^2+c^2)\cos A+b\,(c^2+a^2)\cos B+c\,(a^2+b^2)\cos C=3\,abc$ என நிறுவுக.

$$\Sigma\, a\,(b^2+c^2)\cos A=a\,(b^2+c^2)\cos A+b\,(c^2+a^2)\cos B+c\,(a^2+b^2)\cos C$$

$$=(ab^2 \cos A+ba^2\cos B)+(bc^2\cos B+cb^2\cos C)+(ca^2\cos C+ac^2\cos A)$$

$$=ab\,(b\cos A+a\cos B)+bc\,(c\cos B+b\cos C)+ca\,(a\cos C+c\cos A)$$

$$=ab\cdot c+bc\cdot a+ca\cdot b$$

$$=3\,abc$$ (நி. வே.)

(எ–கா.) (4)

ஒரு முக்கோணத்தில் $a=18$; $b=24$; $c=36$

$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ன் மதிப்பை அறிக.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{24^2+36^2-18^2}{2\times24\times36}$$

$$=\frac{576+1296-324}{2\times24\times36}$$

$$=\frac{1548}{2\times24\times36}$$

$$=\frac{43}{48}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{43}{48}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{455}}{48}$$

$$\tan A=\frac{\sqrt{455}}{43}$$

$2s=78$; $s=39$; $s-a=21$; $s-b=15$; $s-c=3$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{15\times3}{24\times36}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{39\times21}{24\times36}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{91}{6}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{15\times3}{39\times21}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{91}}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{\sqrt{455}}{48};\ \cos A = \frac{43}{48};$$

$$\tan A = \frac{\sqrt{455}}{43};\ \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{91}{6}};\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{5}{91}}$$

(எ-கா.) (5) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$ என நிறுவுக.

$$a(\cos B + \cos C) = 2R\sin A(\cos B + \cos C)$$

$$= 2R\sin A\ 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2R\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.\ 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 8R\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 8R\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 4R\sin^2\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)$$

$$= 2\sin^2\frac{A}{2}(2R\sin B + 2R\sin C)$$

$$= 2\sin^2\frac{A}{2}(b+c)$$

$$= 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$$

(நி. வே.)

(எ-கா.) (6) முக்கோணம் ABCயின் பரப்பு

$$\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}=\frac{4R^2(\sin^2A-\sin^2B)}{2}\,\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$=2R^2\sin(A+B)\sin(A-B)\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$=2R^2\sin(A+B)\sin A\sin B$$

$$=2R^2\sin C\sin A\sin B$$

$$=2R^2\,\frac{c}{2R}\;\frac{a}{2R}\;\frac{b}{2R}$$

$$=\frac{abc}{4R}=\triangle$$

(நி வே.)

பயிற்சி

$\triangle ABC$யில் பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

(1) $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

(2) $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$

(3) $\frac{c\sin(A-B)}{b\sin(C-A)}=\frac{a^2-b^2}{c^2-a^2}$

(4) $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$

(5) $R(a^2+b^2+c^2)=abc(\cot A+\cot B+\cos C)$

(6) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$

(7) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$

(8) $\frac{a}{bc}+\frac{\cos A}{a}=\frac{b}{ca}+\frac{\cos B}{b}=\frac{c}{ab}+\frac{\cos C}{c}$

(9) $\cos A \cdot \sin (B-C) + \cos B \sin (C-A) + \cos C \sin (A-B) = 0$

(10) $a^2 (\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2 (\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2 (\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$

(11) $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0$

(12) $\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0$

(13) $\frac{a \sin (B-C)}{b^2 - c^2} = \frac{b \sin (C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{c \sin (A-B)}{a^2 - b^2}$

(14) $\sin \left(\frac{C}{2} + A \right) = \cos \frac{(A-B)}{2} = \frac{a+b}{c} \sin \frac{C}{2}$

(15) $\cos \left(\frac{C}{2} + B \right) = \sin \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{c} \cos \frac{C}{2}$

(16) $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$

(17) $\cos \frac{A-B}{2} = \frac{a+b}{c} \sin \frac{C}{2}$

(18) $c^2 = (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2}$

(19) $a (\cos C - \cos B) = 2 (b-c) \cos^2 \frac{A}{2}$

(20) $\frac{a^2 \sin (B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin (C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{C^2 \sin (A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$

(21) $\triangle = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

(22) $\triangle = \frac{b^2 - c^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin (B-C)}$

(23) $\triangle = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin (B+C)}$

(24) $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 4 \triangle$

(25) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \triangle}$

(26) $\Delta = \frac{1}{2} R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

(27) $\Delta = \frac{1}{4} (a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C)$

(28) $\Delta = \frac{a^2}{2(\cot B + \cot C)}$

(29) $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b}$ எனின் $a = b$ என நிறுவுக.

(30) $a \cos A = b \cos B$ எனின், அம் முக்கோணம் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் அல்லது ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆக இருக்குமென நிறுவுக.

(31) $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$ எனின் a, b, c கூட்டுத் தொடராயிருக்குமென நிறுவுக.

$\triangle$ ABCல் பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

(32) $a^3 \cos (B - C) + b^3 \cos (C - A) + C^3 \cos (A - B) = 3\, abc$

(33) $(a+b+c) \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}\right) = 2\, c \cot \frac{C}{2}$

(34) $(b+c-a) \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right) = 2\, a \cot \frac{A}{2}$

(35) $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}{\cot A + \cot B + \cot C}$

(36) $\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{s^2}{abc}$

(37) $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$

(38) $a \cos^2 \frac{A}{2} + b \cos^2 \frac{B}{2} + c \cos^2 \frac{C}{2} = s + \frac{\Delta}{R}$

(39) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$

(40) $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$

(41) $$\frac{\cot A+\cot B}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}+\frac{\cot B+\cot C}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}+\frac{\cot C+\cot A}{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}=1$$

(42) $(b^2+c^2-a^2)\tan A=(c^2+a^2-b^2)\tan B$
$=(a^2+b^2-c^2)\tan C=4\triangle$

(43) $\triangle=\frac{a^2}{2(\cot B+\cot C)}$

(44) $a^2, b^2, c^2,$ கூட்டுத் தொடராயின், cot A, cot B, cot C என்பனவும் கூட்டுத் தொடரென நிறுவுக.

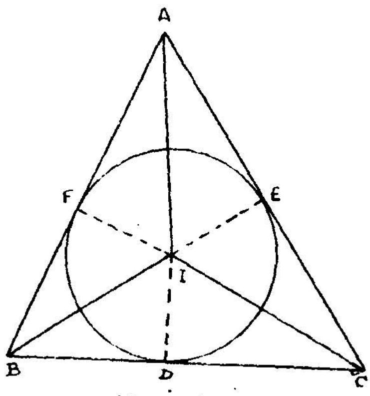
(45) $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ எனின் $\angle C$ யை 60° எனக் காட்டுக.

(46) $\cot A+\cot C=2\cot B$ என்றிருப்பின் $a^2+c^2=2b^2$ எனக் காட்டுக.

10. முக்கோணத்தைச் சார்ந்த வட்டங்கள்

(Circles associated with triangle) :

10·1. உள்வட்டம் (In-circle) :



படம் 37

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் உள் சமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். அப்புள்ளியை I எனக் கொள்வது மரபு. I லிருந்து BCக்கு ID என ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக. I மையங்கொண்டு ID ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைந்தால், அது மூன்று பக்கங்களையும் உள்ளே தொடும். அவ்வட்டம் $\triangle ABC$ன் உள்தொடு வட்டமெனப்படும். அதன் ஆரம் r எனக் குறிப்பிடப்படும். I உள்மையமெனப்படும்.

உள் வட்டம் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் CA, ABஐ முறையே E, Fல் தொட்டும்.

இப்போது $IE \perp CA$

$IF \perp AB$

மேலும் $ID = IE = IF = r =$ உள்வட்ட ஆரமாகும்.

10·1·1. உள் வட்ட ஆரம் r – அதன் மதிப்பு :

$r = \frac{\Delta}{s}$ என நிறுவலாம்.

$\triangle$ ABCன் பரப்பு $\Delta = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$

$$= \frac{1}{2} BC.ID + \frac{1}{2} CA \cdot IE + \frac{1}{2} AB \cdot IF$$

$$= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$$

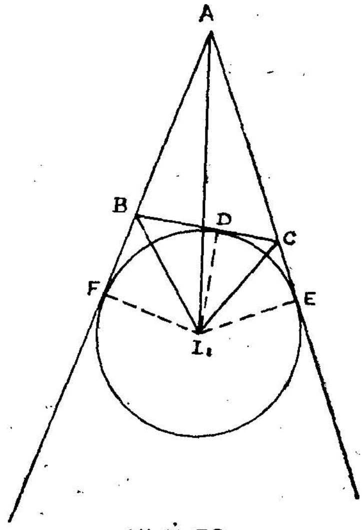
$$= \frac{r}{2} (a+b+c)$$

$$= \frac{r}{2} (2s)$$

$$= rs$$

$$\therefore r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\text{பரப்பு}}{\text{அரைச் சுற்றளவு}}$$

10·2. வெளி தொடு வட்டங்கள் (Ex. circles):



படம் 38

ஒரு முக்கோணத்தில் இரு கோணங்களின் வெளி சம வெட்டிகளும், மூன்றும் கோணத்தின் உட்சமவெட்டியும், ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். இவ்வாறு மூன்று சந்திகள் உண்டு. அவைகளை I_1 (Aக்கு எதிரில்), I_2 (Bக்கு எதிரில்), I_3 (Cக்கு எதிரில்) எனக் குறிப்பது மரபு. I_1 லிருந்து BCக்கு I_1D செங்குத்துக் கோடு வரைக.

I_1 மையம் கொண்டு, I_1D ஆரங்கொண்ட வட்டம், BCஐ உள்ளும், AB, ACன் நீட்டல்களையும் தொடும். இவ்வட்டம் உச்சி Aக்கு எதிரிலமைகிற வெளிதொடு வட்டம். இதன் ஆரம் r_1 எனக் குறிப்பிடப்படும். அவ்வாறே, உச்சி B, உச்சி Cக்கு எதிரிலமையும் வட்டங்கள் மற்றிரண்டு வெளி தொடு வட்டங்கள். அவைகளின் மையங்களை முறையே I_2, I_3 எனவும் ஆரங்களை முறையே r_2, r_3 எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

இப்போது I_1 மையங் கொண்டு, உச்சி Aக்கு எதிரிலுள்ள வெளிதொடு வட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இவ்வெளி வட்டம் AC, ABன் நீட்டல்களை முறையே E, Fல் தொடட்டும்.

இப்போது $I_1E \perp AC$ (ன் நீட்டல்)

$I_1F \perp AB$ (ன் நீட்டல்)

மேலும் $I_1D = I_1E = I_1F = r_1$

10·2·1. வெளிவட்ட ஆரங்கள் r_1, r_2, r_3—அவைகளின் மதிப்பு.

$r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a}$; $r_2 = \dfrac{\Delta}{s-b}$; $r_3 = \dfrac{\Delta}{s-c}$ என நிறுவலாம்.

$$\triangle ABC\text{ன் பரப்பு} = \triangle AI_1B + \triangle CI_1A - \triangle CI_1B$$

$$= \frac{1}{2}AB\cdot r_1 + \frac{1}{2}CA\cdot r_1 - \frac{1}{2}CB\cdot r_1$$

$$= \frac{1}{2}c\cdot r_1 + \frac{1}{2}b\cdot r_1 - \frac{1}{2}a.r_1$$

$$= \frac{1}{2}r_1(c+b-a)$$

$$= \frac{1}{2}r_1(2s-2a)$$

$$= r_1(s-a)$$

$$\therefore \Delta = r_1(s-a)$$

$$\therefore r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$$

இம்மாதிரியே $r_2 = \dfrac{\Delta}{s-b}$; $r_3 = \dfrac{\Delta}{s-c}$ என நிறுவலாம்.

(எ-கா.) (1)

$\triangle ABC$ல் $a=13$; $b=14$, $c=15$ எனின், அம்முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. அதுகொண்டு, உள், வெளி தொடுவட்டங்களின் ஆரங்களை அறிக.

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$(s-a) = 8$$

$$(s-b) = 7$$

$$(s-c) = 6$$

எனவே $\Delta = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$

$$\therefore r = \frac{\Delta}{s} = \frac{84}{21} = 4\,; \qquad r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{84}{8} = 10{\cdot}5$$

$$r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{84}{7} = 12\,; \qquad r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{84}{6} = 14$$

(எ-கா.) (2) $4\mathrm{R}\,rs = abc$ என நிறுவுக.

$$4\mathrm{R}rs = \frac{abc}{\Delta}\, rs \qquad \left(\because \mathrm{R} = \frac{abc}{4\Delta}\right)$$

$$= \frac{abc}{\Delta}\,\Delta$$

$$= abc$$

(எ-கா.) (3) $\dfrac{r_1 - r}{a} + \dfrac{r_2 - r}{b} = \dfrac{c}{r_3}$ என நிறுவுக.

$$\frac{r_1 - r}{a} + \frac{r_2 - r}{b} = \frac{\frac{\Delta}{s-a} - \frac{\Delta}{s}}{a} + \frac{\frac{\Delta}{s-b} - \frac{\Delta}{s}}{b}$$

$$= \frac{\Delta}{a}\left[\frac{s-(s-a)}{s(s-a)}\right] + \frac{\Delta}{b}\left[\frac{s-(s-b)}{s(s-b)}\right]$$

$$= \frac{\Delta}{s(s-a)} + \frac{\Delta}{s(s-b)}$$

$$= \Delta\left[\frac{(s-b)+(s-a)}{s(s-a)(s-b)}\right]$$

$$= \triangle \left[\frac{2s-a-b}{s(s-a)(s-b)}\right]$$

$$= \triangle \frac{c}{s(s-a)(s-b)}$$

$$= \triangle \frac{c \cdot (s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{\triangle \cdot c \cdot (s-c)}{\triangle^2}$$

$$= c \cdot \frac{s-c}{\triangle}$$

$$= \frac{c}{r_3}$$

(எ-கா.) (4) $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = s^2$ என நிறுவுக.

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{\triangle}{s-a} \cdot \frac{\triangle}{s-b} + \frac{\triangle}{s-b} \cdot \frac{\triangle}{s-c} + \frac{\triangle}{s-c} \cdot \frac{\triangle}{s-a}$$

$$= \triangle^2 \left[\frac{s-c+s-a+s-b}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right]$$

$$= \triangle^2 \left[\frac{3s-a-b-c}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right]$$

$$= \triangle^2 \left[\frac{3s-2s}{(s-a)(s-b)(s-c}\right]$$

$$= \triangle^2 s \left[\frac{s}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right]$$

$$= s^2$$

(எ-கா.) (5) முக்கோணம் ABCல் p_1, p_2, p_3 என்பன முறையே A, B, Cயிலிருந்து, எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரைந்த செங்கோடுகளாயின், $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ என நிறுவுக.

$\triangle$ ABCல் $\quad \Delta = \frac{1}{2} a p_1$

$$\therefore \frac{1}{p_1} = \frac{a}{2\Delta}$$

இவ்வாறே $\quad \frac{1}{p_2} = \frac{b}{2\Delta}$

$$\frac{1}{p_3} = \frac{c}{2\Delta}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{a}{2\Delta} + \frac{b}{2\Delta} + \frac{c}{2\Delta}$$

$$= \frac{a+b+c}{2\Delta}$$

$$= \frac{2s}{2\Delta}$$

$$= \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{\frac{\Delta}{s-a}} + \frac{1}{\frac{\Delta}{s-b}} + \frac{1}{\frac{\Delta}{s-c}}$$

$$= \frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} + \frac{s-c}{\Delta}$$

$$= \frac{s-a+s-b+s-c}{\Delta}$$

$$= \frac{3s-a-b-c}{\Delta}$$

$$= \frac{3s-2s}{\Delta}$$

$$= \frac{s}{\Delta} = \frac{1}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

பயிற்சி 10

(1) $\triangle$ABCன் பக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளின் பரப்பளவைக் காண்க.

(1) $a=25$; $b=52$: $c=63$

(2) $a=5$; $b=12$; $c=13$

(3) $a=35$; $b=84$; $c=91$.

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக :

(2) $a+b+c=\dfrac{abc}{2Rr}$

(3) $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$

(4) $rr_1r_2r_3=\triangle^2$

(5) $r_1r_2r_3=rs^2$

(6) $r_1r_2+r_1r_3=as$

(7) $16R^2r\,r_1r_2r_3=a^2b^2c^2$

(8) $r_2+r_3=a\cot\dfrac{A}{2}$

(9) $r+r_1+r_2-r_3=4R\cos C$

(10) $r_1+r_2+r_3-r=4R$

(11) $rr_1+r_2r_3=bc$

(12) $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}$

(13) $a(rr_1+r_2r_3)=b(rr_2+r_3r_1)=c(rr_3+r_1r_2)=abc$

(14) $\dfrac{r_1}{bc}+\dfrac{r_2}{ca}+\dfrac{r_3}{ab}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{2R}$

(15) $\dfrac{ab-r_1r_2}{r_3}=\dfrac{\triangle}{s}=\dfrac{bc-r_2r_3}{r_1}=\dfrac{ca-r_3r_1}{r_2}$

(16) $r(r_1+r_2+r_3)=bc+ca+ab-s^2$

(17) $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\triangle^2}$

(18) $rr_1 \cot\frac{A}{2}=r_2 r_3 \tan\frac{A}{2}=\triangle$

(19) $(r_3-r)(r_1+r_2)=c^2$

(20) $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4r^2R$

(21) $(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_1)=4Rs^2$

(22) $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{r_1+r_2+r_3}{(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^{\frac{1}{2}}}$

(23) $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$

(24) $\Sigma r_1(\cos B-\cos C)=0$

(25) $\Sigma \cos A\cos B=\frac{r^2+s^2-4R^2}{4R^2}$

(26) $\triangle$ ABCல் p_1, p_2, p_3 என்பன முறையே A, B, Cல் இருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரைந்த செங்கோடுகளாயின் $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r_3}$ என நிறுவுக.

(27) $\triangle$ ABCல் $r\,r_1=r_2r_3$ என இருப்பின் அது செங்கோண முக்கோணமெனெ நிறுவுக.

(28) $\triangle$ ABCல் $r_2+r_3=r_1-r$ என இருப்பின் அது செங் கோண முக்கோணமெனெ நிறுவுக.

(29) r_1, r_2, r_3 இசைத்தொடராயின் a, b, c கூட்டுத் தொட ரென நிறுவுக.

(30) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 9, 12, 15 செ. மீ. களாயின் அம் முக்கோணத்தின் R, r, r_1, r_2, r_3ன் நீளங்களைக் காண்க.

(31) 26, 28, 30 செ. மீ. பக்கங்களுள்ள ஒரு முக்கோணத் தில், $R=16\frac{1}{4}$ செ. மீ; $r=8$ செ. மீ; $r_1=21$ செ. மீ; $r_2=24$ செ. மீ. $r_3=28$ செ. மீ. என நிறுவுக.

11. முக்கோணங்களின் தீர்வுகள்

(Solutions of triangles) :

11·1. ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் இருக்கின்றன. அவைகள் அம் முக்கோணத்தின் ஆறு உறுப்புக்கள் எனப்படும். இந்த ஆறு உறுப்புக்களில் எந்த மூன்று உறுப்புக்கள் கொடுத்தாலும்-மூன்று, உறுப்புக்களும் கோணங்கள் என்பது மட்டும் விலக்காக— அதன் மற்றையமூன்று உறுப்புக்களைக் கணக்கிட்டறியலாம்.

மூன்று உறுப்புக்களும் கோணங்களா யிருப்பின் பக்கங்களின் விகிதங்கள் மட்டுமே அறிய முடியும்; ஆனல் பக்கங்களின் திட்டமான நீளங்களை அறிய முடியாது.

11·2. வாய்பாடுகளில் 0° முதல் 90° வரையுள்ள கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கின்றன. அவைகள் இயற்கை நெடுக்கைகள் (Natural sines) இயற்கை கிடக்கைகள் (Natural cosines) இயற்கை இருக்கைகள் (Natural tangents) எனப்படும். 90°ல் இருந்து 180° வரையுள்ள கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகளை 0° முதல் 90° வரையுள்ள கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகளை யொட்டி நாம் அறிவோம்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$\sin 117° = \sin (180° - 63°)$$
$$= \sin 63°$$

கோண கணிதத் தகவுகள் எதிர்நெடுக்கை (cosec θ) அல்லது எதிர்க்கிடக்கை (sec θ) அல்லது எதிர் இருக்கை (cot θ) யாக இருப்பின் அவைகளின் மதிப்பையும் நெடுக்கை, கிடக்கை, இருக்கைகளை யொட்டி அறியலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக, $\cot\theta = \tan(90° - \theta)$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

11·2·1. Sine, Cosine, Tangent வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தும் முறை.

வாய்பாடுகளில் முதல் நிரலில் கோணத்திலுள்ள பாகையும் (degree) அடுத்து வரும் பத்து நிரல்களின் உச்சியில் 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 கலைகளும் (minutes) அதற்கு அடுத்த ஐந்து நிரல்களின் உச்சியில் 1, 2, 3, 4, 5 கலைகளுக்குரிய இடை மிச்சங்களும் (Mean Differences) கொடுக்கப்பட்டு இருக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக, வாய்பாட்டில் $\sin 64° 35'$ன் மதிப்பை அறிய வேண்டுமாயின் முதல் நிரலில் உள்ள 64°ஐ குறிக்க வேண்டும். அதே வரிசையில் $30'$ உள்ள நிரலிலுள்ள பின்னத்தை எடுத்துக்கொண்டு அதோடு அதே வரிசையில் கடைசி 5வது நிரலில் உள்ள $5'$ல் உள்ள எண்ணையும் கூட்ட, நமக்கு $\sin 64° 35'$ன் மதிப்பு கிடைக்கும்.

எனவே $\sin 64° 35' = 0{\cdot}9026 + 0{\cdot}0006$

$$= 0{\cdot}9032$$

0·4279ஐ நெடுக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தை அறிய, வாய்பாட்டிலிருந்து 0·4274ஐ நெடுக்கையாகக் கொண்ட கோணம் $25° 18'$ எனவும், கடைசி 5 நிரல்களில் இருந்து 5க்கு $2'$ எனவும் கண்டு $0{\cdot}4279 = \sin 25° 20'$ எனக் கொள்ளலாம்.

ஒரு கோண கணிதத் தகவின் மடக்கையை யறிய (logarithm) முதலில் கோணத்தின் கோண கணிதத் தகவை தகவு வாய்பாட்டில் கண்டு, பின்னர் அத்தகவுக்குரிய மடக்கையை மடக்கை வாய்பாட்டில் காண்பதற்குப் பதிலாக நேரடியாகவே, கோண கணிதத் தகவின் மடக்கையை அதற்குரிய சிறப்பான வாய்பாட்டிலிருந்து அறியலாம். (tables of logarithmic sines etc).

எடுத்துக் காட்டாக, $\sin 60^\circ = \cdot 8660$

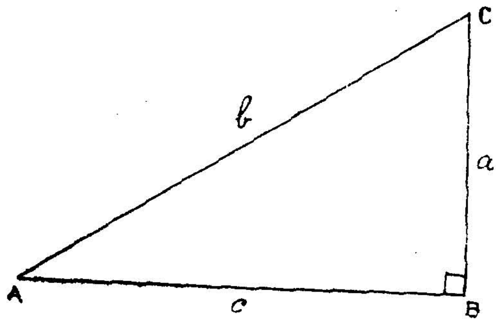
$$\text{மகை.}\ (\sin 60^\circ) = \text{மகை}\ (\cdot 8660)$$

$$= \bar{1}\cdot 9375$$

இதனை நேரடியாகவே நெடுக்கை–மடக்கை (log sine tables) வாய்பாட்டிலிருந்து நேரடியாக, மகை $\sin 60^\circ = \bar{1}\cdot 9375$ என அறியலாம்.

11·3. செங்கோண முக்கோணங்களின் தீர்வுகள் :

முதலில் செங்கோண முக்கோணங்களின் தீர்வுகளைக் காண்போம்.



படம் 39

$\triangle$ ABCல் $\angle B = 90^\circ$ எனக் கொள்வோம்.

(1) ஒரு கோணமும் செம்பக்கமும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

$\angle A$ம் bம் கொடுத்திருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\angle C = 90^\circ - \angle A$

$\sin A = \frac{a}{b}$; $\sin C = \frac{c}{b}$ என்னும் தொடர்புகளில் இருந்து a, cன் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடலாம்.

அதாவது $a = b \sin A$; $c = b \sin C$ எனப் பெறப்படும்.

(2) செம்பக்கமல்லாத ஒரு பக்கமும் ஒரு கோணமும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

$\angle C$ம்; aம் கொடுத்திருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

$$\angle A = 90^{3} - \angle C$$

$$\sin A = \frac{a}{b}, \quad \tan A = \frac{a}{c}$$

இத்தொடர்களில் இருந்து முறையே b, cன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

அதாவது $b = \dfrac{a}{\sin A}$; $c = \dfrac{a}{\tan A}$ எனப் பெறப்படும்.

(3) செம்பக்கமும் மற்றொரு பக்கமும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

aம், bம் கொடுத்திருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{(b+a)\ (b-a)}$$

$\sin A = \dfrac{a}{b}$ என்பதிலிருந்து Aஐ அறியலாம். Aன் குறுங் கோண மதிப்பையே கொள்ளுதல் வேண்டும். பின்பு $\angle C = 90 - \angle A$ எனப் பெறப்படும்.

(4) செங்கோணத்தைக் கொண்ட இரு பக்கங்களும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

aம் cயும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

$$b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

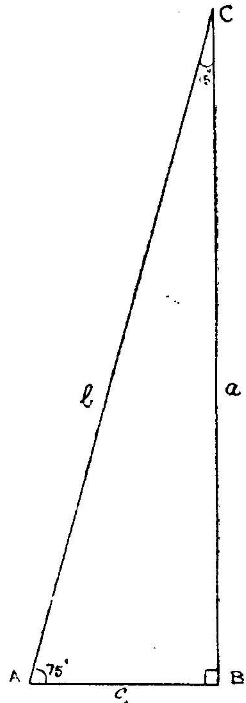
$\tan A \dfrac{a}{c}$ என்பதிலிருந்து $\angle A$ஐ அறியலாம்.

பின்பு $\angle C = 90^{\circ} - \angle A$ எனப் பெறப்படும்.

(எ-கா.) (1) $A = 75°$, $B = 90°$, $c = 50$ ஆயின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$C = 90° - A$$
$$= 90° - 75°$$
$$= 15°$$

$$\sin 15° = \frac{c}{b}$$
$$= \frac{50}{b}$$
$$\therefore b = \frac{50}{\sin 15°}$$



படம் 40

மகை b = மகை 50—மகை sin 15°

$= 1{\cdot}6990 - \bar{1}{\cdot}4130$

$= 2{\cdot}2860$

$\therefore b$ = இனமகை $(2{\cdot}2860) = 193{\cdot}2$

$$\sin 75° = \frac{a}{193{\cdot}2}$$
$$\therefore a = 193{\cdot}2 \times \sin 75°$$
$$= 193{\cdot}2 \times (0{\cdot}9659)$$
$$= 186{\cdot}6$$

ஆகவே $\underline{|A} = 75°$

$\underline{|B} = 90°$

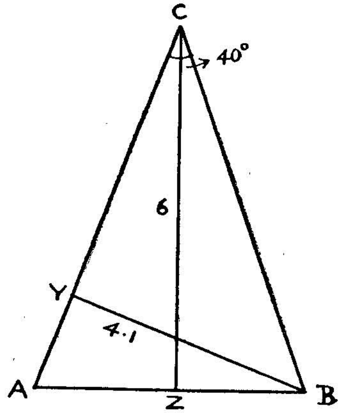
$\underline{|C} = 15°$

$a = 186{\cdot}6$

$b = 193{\cdot}2$

$c = 50$

(எ–கா.) (2) $\triangle ABC$ல் $\underline{|C} = 40^\circ$, B,Cல் இருந்து வரைந்த செங்கோடுகள் முறையே 4·1, 6. முக்கோணத்தை விடுவி.



(படம் 41)

$$\frac{BY}{BC} = \sin 40^\circ$$

$$BC = \frac{BY}{\sin 40^\circ}$$

மகை BC = மகை BY − மகை sin 40°

= மகை 4·1 − மகை sin 40°

$= 0\cdot6128 - \bar{1}.8081$

$= 0\cdot8047$

BC = இனமகை (0.8047)

$= 6\cdot378$

$\therefore\ a = 6\cdot378$

$$\sin B \frac{CZ}{CB} = \frac{6}{6\cdot378}$$

மகை sin B = மகை 6 − மகை 6·378

$= 0\cdot7782 - 0\cdot8047$

$= \bar{1}.9735$

$\therefore \angle B = 70°12'$

$\therefore \angle A = 180 - 70°12' - 40°$

$= 69°48'$

$\frac{CZ}{b} = \sin A$

$b = \frac{6}{\sin 69° 48'}$

மடக்கை $b =$ மடக்கை 6—மடக்கை $\sin 69° 48'$

$= 0{\cdot}7782 - \bar{1}{\cdot}9724$

$= 0{\cdot}8058$

$b =$ இனமடக்கை $(0{\cdot}8058)$

$= 6{\cdot}40$

$\frac{BY}{c} = \sin 69° 48'$

$c = \frac{4{\cdot}1}{\sin 69° 48'}$

மடக்கை $c =$ மடக்கை $4{\cdot}1$—மடக்கை $\sin 63° 14'$

$= 0{\cdot}6128 - \bar{1}{\cdot}9724$

$= 0{\cdot}6404$

$c =$ இனமடக்கை $(0{\cdot}6404)$

$= 4{\cdot}37$

எனவே $\angle A = 69° 48'$

$\angle B = 7\theta° 12'$

$\angle C = 40°$

$a = 6{\cdot}38$

$b = 6{\cdot}40$

$c = 4{\cdot}37$

பயிற்சி 11 (i)

பின்வரும் முக்கோணங்களை விடுவி.

(1) $\underline{|C} = 90°$; $|B = 50°$, $C = 40$

(2) $\underline{|B} = 90°$; $\underline{|A} = 25° \, 12^{1}$; $C = 32$

(3) $\underline{|B} = 90°$; $a = 12{\cdot}5$; $b = 17{\cdot}3$

(4) $\underline{|C} = 90°$; $a = 7{\cdot}32$; $b = 4{\cdot}51$

(5) $\triangle ABC$ல் $\underline{|B} = 64° \; 32^{1}$; $AC = 1{\cdot}72$ Aல் இருந்து வரைந்த செங்கோடு 1·43 என்றிருப்பின் BCஐக் கண்டுபிடி.

(6) $\triangle ABC$ல் $\underline{|C} = 41°$, B, C களில் இருந்து வரைந்த செங்கோடுகளின் நீளம் முறையே 4·2, 4·3 ஆக இருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவிக்கவும்.

11·4. இனி அசமபக்க (scalene) முக்கோணங்கள் விடுவிக்கப்படும் முறைகளைக் காண்போம்.

அவை பின் கூறப்படும் வகைகளில் அமையும்.

(1) மூன்று பக்கங்களின் நீளங்கள் கொடுக்கப்படின்,

(2) ஒரு பக்கமும், இரண்டு கோணங்களும் கொடுக்கப்படின் ;

(3) (i) இருபக்கங்களும் அவைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணமும் கொடுக்கப்படின் ;

(ii) இரு பக்கங்களும் ஒன்றனுக்கு எதிர்ப்பட்ட கோணமும் கொடுக்கப்படின்.

(1) மூன்று பக்கங்களின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன: முக்கோணத்தை விடுவி :

a, b, c கொடுத்திருப்பதால் s-ஐ அறியலாம். $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$

இதிலிருந்து $(s-a), (s-b), (s-c)$ ன் மதிப்புக்களையும் கணக்கிடலாம்.

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

இதிலிருந்து $\underline{|A}$, $\underline{|B}$, $\underline{|C}$ன் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடலாம். ஆனால் ஏதாமிரண்டு கோணங்களைக் கணக்கிட மூன்றாவது கோணம் எளிதில் பெறப்படும். இருப்பினும் மூன்றையும் கணக்கிட்டுச் சரி பார்ப்பதால் பிழைகள் விலக்கப்படும்.

குறிப்பு (1) பக்கங்கள் சிறிய முழு எண்களாக இருப்பின் $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ என்பன போன்ற வாய்பாடுகளை உபயோகித்தும் $\underline{|A}$, $\underline{|B}$, $\underline{|C}$ ன் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடலாம்.

குறிப்பு (2) $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ க்குரிய வாய்பாடுகள் கொண்டும் $\underline{|A}$, $\underline{|B}$, $\underline{|C}$ கணக்கிடலாம்.

(எ–கா.) (1) $a=345{\cdot}6$; $b=456{\cdot}6$; $c=567{\cdot}8$ எனின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$2s = 345\ 6 + 456{\cdot}6 + 567.8$$

$$= 1370$$

$$s = 685$$

$$s-a = 339{\cdot}4$$

$$s-b = 228{\cdot}4$$

$$s-c = 117{\cdot}2$$

$$\tan\frac{A}{2} = \left[\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{மகை } \tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\Big[\text{மகை }(s-b)+\text{மகை }(s-c)-\text{மகை } s - \text{மகை }(s-a)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\text{மகை } 228\cdot4+\text{மகை } 117\cdot2-\text{மகை } 685 - \text{மகை } 339\cdot4\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[2\cdot3587+2\cdot0690-2\cdot8357-2\cdot5307\Big]$$

$$= \bar{1}\cdot5307$$

$$\therefore \angle\frac{A}{2} = 18^\circ\ 45'$$

$$\therefore \angle A = 37^\circ\ 30'$$

$$\text{மகை } \tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\Big[\text{மகை }(s-c)+\text{மகை }(s-a)-\text{மகை } s - \text{மகை }(s-b)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[2\cdot0690+2\cdot5307-2\cdot8357-2{:}3587\Big]$$

$$= \bar{1}\cdot7027$$

$$\therefore \angle\frac{B}{2} = 26\cdot46'$$

$$\therefore \angle B = 53^\circ 32'$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 37\ 24' - 53^\circ\ 32'$$

$$= 88^\circ\ 58'$$

$$\therefore \angle A = 37^\circ\ 30'$$

$$\angle B = 53^\circ\ 32'$$

$$\angle C = 88^\circ\ 58'$$

(எ-கா.) (2)

$a=3,\ b=5,\ c=7$ எனின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\cos A = \frac{25+49-9}{2\times5\times7}$$

$$= \frac{13}{14}$$

மகை cos A = மகை 13 − மகை 14

$= 1{\cdot}1139 - 1{\cdot}1461$

$= \bar{1}{\cdot}9678$

$\therefore \angle A = 21^\circ\ 43'$

$$\text{Cos B} = \frac{49+9-25}{2\times 7\times 3}$$

$$= \frac{11}{14}$$

மகை Cos B = மகை 11 — மகை 14

$= 1{\cdot}0414 - 1{\cdot}1461$

$= \bar{1}{\cdot}8953$

$\therefore \angle B = 38^\circ\ 12'$

$\therefore \angle C = 180^\circ - 21^\circ\ 48' - 38^\circ\ 12'$

$\therefore \angle C = 120^\circ$

எனவே $\angle A = 21^\circ\ 48'$

$\angle B = 38^\circ\ 12'$

$\angle C = 120^\circ$

பயிற்சி 11 (ii)

கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் முக்கோணங்களை விடுவி.

(1) $a = \sqrt{3}$; $b = \sqrt{13}$; $C = \sqrt{17}$

(2) $a = 3$; $b = 5$; $c = 7$

(3) $a = 2$; $b = \sqrt{6}$; $c = \sqrt{3} - 1$

(4) $a = 68{\cdot}47$; $b = 92{\cdot}68$; $c = 71{\cdot}42$

(5) $a = 229{\cdot}2$; $b = 181{\cdot}2$; $c = 257$

(6) $a = 4002$; $b = 2998$; $c = 4300$

(7) $a = 345{\cdot}6$; $b = 456.6$; $c = 567{\cdot}8$

(8) $a = 2000$; $b = 1050$; $c = 1150$

11·5. 2. ஒரு பக்கமும் இரண்டு கோணங்களும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. முக்கோணத்தை விடுவி.

a, $\angle A$, $\angle B$ என்பன கொடுத்திருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம்.

$\angle A$ ம், $\angle B$ ம் கொடுத்திருப்பதால் $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ என உடனடியாக அறியலாம்.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ என்னும் வாய்பாட்டில்

இருந்து $$b = \frac{a}{\sin A} \sin B$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \sin C$$

(எ-கா.) (1) $a = 55$, $\angle A = 65°$; $\angle B = 45°$ எனின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\angle C = 180° - 65° - 45°$$
$$= 70°$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ என்றிருப்பதால்,

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B$$

$$= \frac{55}{\sin 65°} \sin 45°$$

மகை b = மகை 55 + மகை sin 45° − மகை sin 65°

$$= 1\cdot 7404 + \bar{1}\cdot 8495 - \bar{1}\cdot 9573$$
$$= 1\cdot 6326$$
$$\therefore\ b = 42\cdot 91$$

மேலும் $$c = \frac{a}{\sin A} \sin C$$

$$= \frac{55}{\sin 65°} \sin 70°$$

மகை $c =$ மகை $55 +$ மகை $\sin 70° -$ மகை $\sin 65°$

$= 1{\cdot}7404 + \bar{1}{\cdot}9730 - \bar{1}{\cdot}9573$

$= 1{\cdot}7561$

$\therefore \quad c = 57{\cdot}03$

எனவே $\angle C = 70°$

$b = 42{\cdot}91$

$c = 57{\cdot}03$

பயிற்சி 11 (iii)

கீழ்க்கொடுத்திருக்கும் முக்கோணங்களை விடுவி.

(1) $A = 70°;\ C = 80°;\ c = 360$

(2) $A = 45°;\ B = 75°,\ c = \sqrt{6}$

(3) $A = 102°\ 37',\ B = 24°\ 28',\ a = 2664$

(4) $A = 35°\ 17',\ C = 45°\ 13',\ b = 42{\cdot}1$

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் 7 செ.மீ. அடிக் கோணங்கள் 129° 23,′ 38° 36′ மிகச் சிறிய பக்கத்தின் அளவை யறிக.

11·6. 3. இரு பக்கங்களும் ஒரு கோணமும் கொடுக்கப் பட்டால் அவை இரண்டு வகைப்படும்.

(1) இரு பக்கங்களும் அவைகளுக்கிடைப்பட்ட கோண மும்.

(2) இரு பக்கங்களும் அவற்றுள் ஒன்றன் எதிர்கோண மும்.

3. (1) இரு பக்கங்களும் அவற்றின் இடைக்கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. முக்கோணத்தை விடுவி.

$\angle A$, b, c கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்வோம். b, cஐ விடப் பெரியதெனக் கொள்வோம்.

$$\tan \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{A}{2}$$ என நாம் அறிவோம்.

இதிலிருந்து $\frac{B - C}{2}$ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். (1)

$\triangle$ ABC-ல் $\frac{B + C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$

இதிலிருந்து $\frac{B+C}{2}$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். (2)

(1), (2) கூட்ட, கழிக்க, $\underline{|B}$, $\underline{|C}$ ன் மதிப்புக் கிடைக்கும். பின்னர் $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ என்னும் வாய்பாட்டை உபயோகித்து a-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

(எ-கா.) (1) $A=60°$; $b=45$; $c=50$ ஆக இருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$c>b$ ஆகையால்

$$\tan\frac{C-B}{2}=\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{9}{95}\tan 60°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{19}$$

$$\therefore \text{மகை } \tan\frac{C-B}{2}=\frac{1}{2}\text{ மகை } 3-\text{மகை } 19$$

$$=\frac{1}{2}(0\cdot4771)-1\cdot2788$$

$$=\bar{2}\cdot9598$$

$$\therefore \frac{C-B}{2}=5°\ 13'$$

$$\frac{C+B}{2}=60°\ 0'$$

$$\therefore \underline{|C}=65°\ 13'$$

$$\underline{|B}=54°\ 47'$$

$$\frac{a}{\sin 60°}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin 60°}=\frac{45}{\sin 54°\ 47'}$$

$$\therefore a=\frac{45\cdot\sin 60°}{\sin 45°\ 47'}$$

மகை $a =$ மகை $45 +$ மகை $\sin 60^\circ -$ மகை $\sin 54^\circ 47'$

$= 1 \cdot 6532 + \bar{1} \cdot 9375 - \bar{1}.9123$

$= 1 \cdot 6784$

$\therefore \; a = 47 \cdot 68$

$\angle B = 54^\circ 47'$

$\angle C = 65^\circ 13'$

கொடுத்திருக்கும் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் சிறிய முழு எண்களாக இருப்பின் $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A$ என்னும் வாய்ப்பாட்டை உபயோகித்தும் முக்கோணத்தை விடுவிக்கலாம்.

(எ-கா.) (2)

$a = 12$; $b = 11$; $C = 35^\circ 6'$ எனின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$\therefore \; c^2 = 144 + 121 - 264 \, (\cdot 8181)$

$= 265 - 216$

$= 49$

$\therefore \; c = 7$

$$\sin B = \frac{b}{c} \sin C$$

மகை $\sin B =$ மகை $11 +$ மகை $\sin 35^\circ 6' -$ மகை 7

$= 1 \cdot 0414 + \bar{1} \cdot 7597 - 0 \cdot 8451$

$= \bar{1}.9560$

$\therefore \; \angle B = 64^\circ 39'$

$\angle A \equiv 180 - 64^\circ 39' - 35^\circ 6'$

$= 80^\circ 15'$

எனவே $\angle A = 80^\circ 15'$

$\angle B = 64^\circ 39'$

$C = 7$

பயிற்சி 11 (iv)

பின்வரும் முக்கோணங்களை விடுவி.

(1) $a = 68 \cdot 47$; $b = 92 \cdot 68$; $\angle C = 49^\circ 52'$

(2) $a = 345 \cdot 6$; $c = 567 \cdot 8$; $\angle B = 53^\circ 31'$

(3) $b = 105$; $c = 212 \cdot 5$; $\angle A = 77^\circ 7'$

(4) $c = 395 \cdot 6$; $a = 246 \cdot 2$: $\angle B = 66^\circ 17'$

(5) $a = 7$; $b = 5$; $\angle C = 81^\circ 49'$

(6) $b = 3$: $c = 5$; $\angle A = 101^\circ 32'$

(7) $b=2998$; $c=4300$; $\underline{|A}=63^\circ\ 36'$

(8) $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt{3}$; $\underline{|C}=90^\circ$

11·7. 3(2) ஈரடிவகை (Ambiguous Case):

ஒரு முக்கோணத்தில் இரு பக்கமும் அவற்றுள் ஒன்றன் எதிர் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. முக்கோணத்தை விடுவி.

b, c, B கொடுத்திருப்பதெனக் கொள்வோம்.

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ $\therefore$ $\sin C=\frac{c \sin B}{b}$ என்பதிலிருந்து $\underline{|C}$ ஐக் கணக்கிடலாம். பிறகு $A=180^\circ-(B+C)$ எனக் கிடைக்கும்.

பின்னர் $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ என்பதிலிருந்து

$a=\frac{b \sin A}{\sin B}$ எனக் கணக்கிடலாம்.

ஆனால் $\sin C=\frac{c \sin B}{b}$ என்று கொண்டு $\underline{|C}$ ஐக் கணக்கிடும்போது,

(1) சில சமயங்களில் $\underline{|C}$ ன் மதிப்பே பெற முடியாத ஒரு நிலை ஏற்படலாம்; அல்லது,

(2) சில சமயங்களில் $\underline{|C}$-க்கு ஒரு மதிப்புக் கிடைக்கலாம்; அல்லது

(3) வேறு சில சமயங்களில் $\underline{|C}$க்கு இரு மதிப்புக்கள் கிடைக்கலாம்.

(A) முதலாவதாக $\underline{|B}$ ஒரு குறுங்கோணமாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்வோம்.

(a) $c \sin B>b$ ஆனால், $\frac{c \sin B}{b}>1$ ஆகும்.

அப்போது $\underline{|C}$க்கு ஒரு மதிப்பும் கிடைக்காது. (ஏனெனில் $\sin C \not> 1$)

(b) $c \sin B=b$ ஆனால் $\frac{c \sin B}{b}=1$ ஆகும்.

அப்போது $\underline{|C} = 90°$

(c) $c \sin B < b$ ஆனல் $\frac{c \sin B}{b} < 1$. அப்போது $\underline{|C}$க்கு இரு மதிப்புக்கள் கிடைக்கும். ஒன்று θ ஆனல் மற்றொன்று $180-\theta$ ஆகும். ஏனெனில் $\sin(180-\theta) = \sin\theta$.

ஆனல் எப்போதும் இவ்விரண்டு மதிப்புக்களும்—அதாவது ஒன்று குறுங்கோண மதிப்பு, மற்றொன்று அதன் நிமிர்க் கோணமான விரிகோண மதிப்பு—பொருந்துமா என ஆராய வேண்டும்.

(i) $b > c$ ஆனல் $\underline{|B} > \underline{|C}$ ஆகும். அப்போது $\underline{|C}$ விரிகோண மதிப்பைப் பெறுவது பொருந்தாது. (ஏனெனில் $\underline{|B}$ ஒரு குறுங்கோணமெனக் கொள்ளப்பட்டது). $\underline{|C}$க்குக் கிடைக்கும் குறுங்கோண மதிப்பொன்றே பொருந்தும். (அல்லது வேறொரு முறையில் பார்க்கும்போது $\underline{|C}$ விரிகோணமானல் $\underline{|B}$ம் விரிகோணமாக வேண்டும். இது பொருந்தாது. ஏனெனில் ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு விரிகோணங்கள் இருக்க முடியாது)

(ii) $b = c$ ஆனல் $\underline{|B} = \underline{|C}$. இங்கு $\underline{|B}$ ஒரு குறுங்கோணமெனக்கொள்ளப்பட்டதால், $\underline{|C}$ம் அதற்குச் சமமான குறுங்கோணமாகும். $\underline{|C}$ன் விரிகோண மதிப்புப் பொருந்தாது.

(iii) ஆனல் $b < c$ ஆனல் $\underline{|B} < \underline{|C}$ ஆகும். இந்த நிலையில் $\underline{|C}$ன் குறுங்கோண, விரிகோண, மதிப்புக்கள் இரண்டும் பொருந்தும்.

எனவே $\underline{|C}$க்கு குறுங்கோண மதிப்பொன்றும் விரிகோண மதிப்பொன்றும் பொருத்தமாகும்போது, $\underline{|A}$க்கு இரண்டு மதிப்புக்கள் வரும். அந்த இருவேறுபட்ட $\underline{|A}$ன்மதிப்புக்கும் $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$,என இரு வேறுபட்ட a - ன் மதிப்புக்கள் கிடைக்கும்.

பிழைதிருத்தம்

இயற்கணிதம்

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
11	15	O×O – தெரியாது (O – அல்ல)	முற்றிலும் நீக்கிவிடுக.
15	9	$y=(\sqrt{x}\ )^3+\frac{1}{\sqrt{x}};-\sqrt{x}$	$y=\left(\sqrt{x}\right)^3+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x};$
26	19	x^{m+m+m}......n முறைகள்	$x^{m+m+m+\cdots n}$ முறைகள்
27	21	கணியத்தை என்ற படிக்கு	கணியத்தை 0 என்ற படிக்கு
28	6	$y^n=x\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdots\cdots^n$ முறைகள்	$y^n=x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots n}$ முறைகள்
29	6	$x\ \frac{-m}{n}$ ன் பொருள்	$x^{-\frac{m}{n}}$ ன் பொருள்
29	17 முதல் 21 வரை முற்றிலும் நீக்கிவிடவும்		
31	2	$\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\ b^{-\frac{1}{2}}c^2\right)^{-3}\left(a^2b^2c^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{a^4b^5c^6})\ (a^2b^{-2}c^{-2})}$	$\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\ b^{-\frac{1}{2}}c^2\right)^{-2}\left(a^2b^{-2}c^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(a^4b^5c^6)\ (a^2b^{-2}c^{-2})}}$
33	14	$\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(a^nb^n\right)^{-\frac{3}{2}}\left(a^3b^3\right)\frac{n}{2}\left(\frac{b}{a}\right)$	$\left(a^{\frac{1}{2}}\ b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(a^nb^n\right)^{-\frac{3}{2}}\left(a^3b^3\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{b}{a}\right)$

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
34	6	$\left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-b}}$	$\left(x^{\frac{c+a}{b-a}}\right)^{\frac{1}{c-b}}$
34	10	$y = zx,$	$y = z^{x}$
35	4	$3^{2}{}_{y-z} = 9.$	$3^{2y-x} = 9$
39	27	$\sqrt[p]{a} - \sqrt[q]{b}$	$\sqrt[p]{a} - \sqrt[q]{b}$
42	7	$\frac{5}{5-\sqrt{3}}$	$\frac{2}{5-\sqrt{3}}$
44	4	$\because \sqrt{a} \neq b + \sqrt{c}$.	$\therefore \sqrt{a} \neq b + \sqrt{c}$
52	15	$\therefore$ N = a (மகை$_a$ N)	N = $a^{(\text{மகை}_a \text{N})}$
60	3	மகை$_2\sqrt{2}$ 16	மகை$_{2\sqrt{2}}16$
60	4	மகை$_3\sqrt{3}$ 243	மகை$_{3\sqrt{3}}243$
67	19	$-1, -2, 3, \ldots$	$-1, -2, -3, \ldots$
85	10	$\frac{a+x}{b+x}$	$\frac{a+x}{a+x}$
86	10	$\frac{a}{b} \frown \frac{a-x}{b-x}$ கண்டு	$\frac{a}{b} \frown \frac{a-x}{b-x}$ என்று

94	1	$\frac{bz+cx}{b-c}=\frac{cy+az}{c-a}$	$\frac{bz+cy}{b-c}=\frac{cx+az}{c-a}$
95	6	$\frac{n+1}{a^{n}}+\frac{n+1}{b^{n}}+\frac{n+1}{c^{n}}$	$a^{\frac{n+1}{n}}+b^{\frac{n+1}{n}}+c^{\frac{n+1}{n}}$
96	15	between $\underline{a}$ and $\underline{c}$	to $\underline{a}$ and $\underline{b}$
102	9	Question 6 (ii) "–"	Question 6 (ii) "="
102	12	Question 6 (v) $+\ \frac{76}{49}$	Question 6 (v) $=\ \frac{76}{49}$
104	7	$a\left\{x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right.$	$a\left\{x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}$
107	18	$a\left(\qquad\right)\equiv\left\{\qquad\right\}$	$a\left(\qquad\right)\equiv a\left\{\qquad\right\}$
111	7	$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$	$\frac{\alpha^2}{\beta}\times\frac{\beta^2}{\alpha}$
114	16	< 0	> 0
125	11	$ax^2+bx+c=0$ என்பது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு	ax^2+bx+c என்பது ஓர் இருபடிக் கோவை

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
125	22	$y=ax^2\ bx+c$	$y=ax^2+bx+c$
126	10	$y=ax^2+bx=c$	$y=ax^2+bx+c$
137	18	ax_2+bx+c	ax^2+bx+c
139	2	$y+6x-5$	$y=6x-5$
140	26	$ax+^2+bx+c$	ax^2+bx+c
145	20	$\frac{49}{3}$	$-\frac{49}{3}$
146	8	$y \geq \frac{16}{5}$	$y \leq -\frac{16}{5}$
146	23	மீப்பெருமதிப்பு $\frac{1}{3}$	மீப் பெருமதிப்பு 3
146	24	x, y என்ற	x, y என்பன
156	14	$2x=y$	$2^x=y$
156	18	$2x=4$	$2^x=4$
156	20	$2x=-6$	$2^x=-6$

158	10	$x = \frac{bc^1 - b^1c}{ab^1 - ab^1}$	$x = \frac{bc^1 - b^1c}{ab^1 - a^1b}$
162	17	$y = -2, 4$	$x = -2, 4$
165	4	$x = -3 \pm \sqrt{3}$	$x = -3 \mp \sqrt{3}$
168	கணக்கு 13	$x^3 - y^3 = 224$	$x^3 + y^3 = 224$
172	1	$\overline{a+n} - 2d, \overline{a+n} - 1d$	$a + \overline{n-2}d, a + \overline{n-1}d$
172	4	$\overline{a+n} - 1d, \overline{a+n} - 2d$	$a + \overline{n-1}d, a + \overline{n-2}d$
172	6	$\overline{a+n} - 1d$	$a + \overline{n-1}d$
172	12	$(\overline{l-n} - 2d) + (\overline{l-n} - 1d)$	$(l - \overline{n-2}d) + (l - \overline{n-1}d)$
173	9	$2+4+6 \ldots 2n \ \frac{n}{2} = (2+ \ldots n$	$2+4+6 \ldots 2n = \frac{n}{2}(2+2n)$
176	18	$= \frac{n}{2}(2a + \overline{n} + 1b)$	$= \frac{n}{2}(2a + \overline{n+1}b)$
186	தலைப்பு	Hormonic	Harmonic
191	1	$\frac{1}{x_2} = \frac{1+2(1-m)}{m(n+1)}$	$\frac{1}{x_2} = 1 + \frac{2(1-m)}{m(n+1)}$
200	21	$(-1)^{n-1} arn^{-1}$	$(-1)^{n-1} ar^{n-1}$
201	19	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1=r}$	$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
201	21	1,000.000	1,000,000

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
202	5	$n \leftarrow \infty$	$n \rightarrow \infty$
202	11	$\frac{a}{a-r}$	$\frac{a}{1-r}$
202	27	$\frac{5}{5}$	$\frac{4}{5}$
203	4	$r \mid > 1$	$\mid r \mid > 1$
208	8	$r=2$ ஆனல்	இப்பகுதியை நீக்குக
208	9	உறுப்புக்கள்	$r=2$ ஆனல் உறுப்புக்கள்
212	4	$x_3 . x_4$	$x_3,\ x_4$
214	8	இரண்டும் கூட்டு₁	இரண்டும் கூட்டு
217	15	.91	91·
222	5	$x = xr^{2n}$	$y = xr^{2n}$
222	6	$r = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}n}$	$r = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2n}}$
234	9	$b.c$	b, c
239	23	" "	"......"
255	13	${}_nC_r = {}_nC_n - C_r$	${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
257	3	$\frac{\angle \underline{n-1}}{\angle r-1 \ \angle \underline{n-r}}$	$\frac{\angle \underline{n-1}}{\angle \underline{r-1} \ \angle \underline{n-r}}$
262	7	${}_nC_1 = 1$	${}_nC_1 = n$

270	5	$(x+a)^2 = x^2 + \ldots\ldots$	$(x+a)^2 = x^2 + \ldots\ldots$
272	8	$sn = a_1 a_2 \ldots\ldots n$	$s_n = a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$
272	11	$(x+a)$	$(x+a_1)$
275	25	${}_nO_1 = n$	${}_nC_1 = n$
276	15	$(x-1)^n = 1 - \ldots\ldots$	$(x-1)^n = x^n - \ldots\ldots$
277	19	கடைசி உறுப்பு " x^6 "	கடைசி உறுப்பு " a^6 "
279	4	$18 - 3^r$	$18 - 3r$
279	10	$18 - 3^r$	$18 - 3r$
279	19	கீழுறுப்பு $x \frac{3r}{2}$	$x^{\frac{3r}{2}}$
280	1	$x \frac{22-r}{3} - \frac{3r}{2}$	$x^{\frac{22-r}{3} - \frac{3r}{2}}$
280	2	$x \frac{44-11r}{6}$	$x^{\frac{44-11r}{6}}$
283	6	$(1+)\ x^{20}$	$(1+x)^{20}$
285	9	$+C_0 + C_n + \ldots$	$= C_0 + C_n +$
286	8	$C_1 = n \quad = n$	$C_1 = n$
291	10	$(1-x)^{-\frac{p}{q}}$	$(1-x)^{\frac{-p}{p}}$

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
291	12	$(1+x)^{-\frac{p}{q}}$	$(1+x)^{\frac{-p}{q}}$
291	13	$+\frac{p\,(p+q)\,p+2q)}{\angle 3}\left(\frac{x}{q}\right)^3$	$+\frac{p(p+q)(p+2q)}{\angle 3}\left(\frac{x}{q}\right)^3$

இயற்கணிதம் – விடைகள் (295–305)

பக்கம்	பயிற்சி	கேள்வி எண்	பிழை	திருத்தம்
297	5 (2)	9 (*b*)	y	r
297	6 (1)	2 (2)	$a^3+b^3\,;\;\; a^3-b^3$	$a^3+b^3 : a^3-b^3$
298	7 (1)	1 (4)	$-21\pm\sqrt{3}$	$-2\pm\sqrt{3}$
298	7 (1)	4 (2)	$\frac{-8b^2+6\,abc}{ac^2}$	$\frac{-8b^3+6\,abc}{ac^2}$

299	7 (1)	6	$4x^2+4x+13-0$	$4x^2+4x+13=0$
300	8 (2)	6 (3)	$5-\overline{26}$	$5-2\sqrt{6}$
300	9 (2)	7	$y=5\underline{\pm\sqrt{-15}}$ / 2	$y=\frac{5\mp\sqrt{-15}}{2}$
302	12	5 (1)	$9\ 10^n$	$9\cdot10^n$
302	12	17	$\frac{1}{8\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt[8]{a}}$
303	13	13 (3)	$\frac{n(n+1)}{3}a$	$\frac{n(n+1)}{2}a$
304	14 (3)	15	${}_{11}C_5\begin{pmatrix}8\\ \angle\end{pmatrix}^2$	${}_{11}C_5\left(\angle\underline{8}\right)^2$
304	14 (3)	18	$\frac{\lfloor 52}{\lfloor 4 - \lfloor 13 \cdot 4}$; $\frac{\lfloor 52}{(\lfloor\ \lfloor 13)^4}$	$\frac{52}{\lfloor 4(\lfloor 13)^4}$; $\frac{\lfloor 52}{(\lfloor 13)^4}$
304	16 (1)	15	${}^{n}C_{\frac{2n-r}{5}}$	${}_{n}C_{\frac{2n-r}{5}}$

இயல்முறை வடிவ கணிதம்

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
312	18	CA^3	CA^2

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
319	4	$\frac{bx_2c+x_3}{b+c}$	$\frac{bx_2+cx_3}{b+c}$
324	22	$=[-40+10x]$	$\frac{1}{2}[-40+10x]$
329	3	$\sqrt{(x-2^2+\ldots\ldots}$	$\sqrt{(x-2)^2+\ldots\ldots}$
329	12	$\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ $\sqrt{(x+a)^2+y^2}$	$\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$
330	9	$\triangle=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+(y_3-y_1)+\ldots\ldots]$	$\triangle=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+\ldots\ldots]$
331	13	5 (3)	6
333	24	படம் 2·2ல்	படம் 9ல்
334	8	சார்வு	சார்பு
344			கடைசி வரியை விட்டுவிடுக.
346	13	படம் 2·5·2ல்	படம் 14ல்.
348	7	ax_2+by^2+c	ax_2+by_2+c
350	15	ADன்	AD என்ற
355	3	$px+qy+c=0$	$px+qy+r=0$
361	6	$\frac{m-m_1}{1+mm^1}$	$\frac{m-m^1}{1+mm^1}$

363	18	$13x+by=k$	$13x+6y=k$
363	26	$7+39=k$	$6+39=k$
366	8	$\tan\theta=\frac{mm \int m^1}{1+mm^1}$	$\frac{m \backsim m^1}{1+mm^1}$
366	20	$\tan\theta=\frac{a_1b_2 \int a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}$.	$\frac{a_1b_2 \backsim a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}$
371	3	$(x-a)^2+(y-b)^2=\imath^2$	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
373	11	$\sqrt{-3}$	$\sqrt{-c}$
375	16	$-\left(5\frac{1}{2}\right)^2$	$=\left(5\frac{1}{2}\right)^2$
380	19	$+\frac{53}{26}y$	$\frac{53}{13}y$
395	7	$Q(-g,-f^1)$	$Q(-g^1,-f^1)$
398	4	$(1,0);(4,0)$	$(0,1);(0,4)$
400	22	6	0
401	28	$\sqrt{(g-g^1)+(f-f^1)_2}$	$\sqrt{(g-g^1)^2+(f-f^1)^2}$
401	30	$S+KS^1=0$	$S+kS^1=0$
405	26	$x^2+y^2=100$	$x^2+y^2=25$

இயல்முறை வடிவ கணிதம்—விடைகள் (407–412)

பக்கம்	பயிற்சி	கேள்வி எண்	பிழை	திருத்தம்
409	3	2 (5)	$mx - by$	$mx - ly$
409	3	3	$2x - 6y + 16 = 0$	$2x - 5y + 16 = 0$
411	4 (iv)	4	$(0, -6$	$(0, -6)$
			துண்டு நீளம் 1	துண்டு நீளம் 5
412	பல்கலைக் கழகம் நேர்க்கோடுகள்	1	$\frac{x}{y} + \frac{y}{b} = 1$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
412	,,	12	$\frac{113}{43}$	$\frac{113}{13}$
412	,,	21	$(-2, 1)$	$(4, 7)$
412	,, வட்டங்கள்			
		1	$(0, 3 \pm 2\sqrt{2})$	$(0, 3 \pm \sqrt{6})$
412	,,	3	$\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$
412	,,	13	$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)$	$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

பிழை திருத்தம்

(இரண்டாம் பாகம்)

வடிவ கணிதம்

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
2	9	ஒழு	ஒரு
4	4	CD	$\overline{CD}$
10	27	'கொட்டை எழுத்துக்களில்' என்பதை நீக்கவும்.	
12	25	$\frac{\overline{AP}}{PB}$	$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$
20	2	'A,Bக்கு' என்பதை நீக்கவும்.	
23	படம்	இரண்டிலும் முறைப்படி	A, B, C.
23	21	$\therefore AC=AE$	$\therefore AC=AE$ (B)
23	22	(வ. வ.) (B)	(வ. வ.)
24	18	வெட்டுகின்றன (A)	வெட்டுகின்றன.
24	19	(ஒத்த கோணங்கள்)	(ஒத்த கோணங்கள்) (A)
26	4	$b \int c$	$b \frown c$
35	22	$a : b = c : b$	$a : c = c : b$
40	16	$-\frac{AB^2}{BC^2}$	$=\frac{AB^2}{BC^2}$
47	2	5; 7:9	5 : 7 : 9
56	5	AP BD	AP · BD
57	10	$\underline{\lfloor ADE} = \underline{\lfloor DBC}$	$\underline{\lfloor ADE} = \underline{\lfloor CDB}$
60	2	$\frac{\overline{AP}}{PB}$	$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$
61	1	ZB	ZB^2
61	3	A,, B, C	A, B, C
62	13	AZ_1^2	AZ'^2
62	16	AZ_1^2	AZ'^2
65	14	வ. வ படி	வ. வ. படி
83	9	AA_1	AA^1
88	1	$-\frac{SA^1}{OA}$	$=\frac{SA^1}{OA}$
101	2	$PP^1 \perp B \perp QQ^1$	$PP^1 \perp BC \perp QQ^1$

கோண கணிதம்

$g, ', ''$ என்று வரும் இடங்களில் $', ''$ என்பன நூற்றின் பகுப்பு முறையில் கலை, விகலையையும், $°, ', ''$ என்று வரும் இடங்களில் $', ''$ என்பன அறுபான் பகுப்பு முறையில் கலை, விகலையையும் குறிக்கும்.

இடத்திற்குத் தகுந்தாற்போல் 1 (number one) ' (dash)ஐக் குறிக்கும்.

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
126	15	$\frac{AC}{AB}=\frac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{அடுத்த பக்கம்}}$
138	18	$\text{cosec}^3\theta$	$\text{cosec}^2\theta$
141	22	$\frac{AB}{BD}=\frac{\sqrt{3}\,a}{a}\ \sqrt{3}$	$\frac{AD}{BD}=\frac{\sqrt{3}\,a}{a}=\sqrt{3}$
142	படம்	$\sqrt{2a}$	$\sqrt{2}\ a$
144	20	OM^1	OM_1
144	22	$\frac{O}{OP^1}$	$\frac{O}{OP_1}$
144	26	$\frac{O}{OP_1}=0$	$\frac{OP_1}{OP_1}=1$
145	11	கோணம் $\theta=$ தகவு	கோணம் θ தகவு
146	3	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
146	9	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$
158	13	$270° < \theta > 360°$	$270° < \theta < 360°$
162	17	$\frac{OP^1}{-MP}$	$\frac{OP^1}{MP^1}$
165	6	XOX^1 க்கி	XOX^1 க்கு
165	10	$(= \underline{\lvert O^1PM^1})$	$(= \underline{\lvert O^1P^1M^1})$
167	3	XMP	MOP
167	4	$\underline{\lvert MOP^1}$	$\underline{\lvert M^1OP^1}$
167	12	$\frac{OM}{OP}$	$-\frac{OM}{OP}$
172	11	460°	360°
173	1	$2(360°)+0$	$2(360°)+\theta$

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
173	10	$=\sin\theta$	$=-\sin\theta$
174	5	$\sec(2\times360^\circ+60^\circ)$	$\sec(2\times360^\circ+30^\circ)$
174	13	$1^\circ\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
182	4	PQ_1 PR	PQ, PR
191	13	$\cos(A+B)+\cos(A+B)$	$\cos(A+B)+\cos(A-B)$
191	14	$\sin(A-13)$	$\sin(A-B)$
198	7	$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$	$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$
198	11	$1-\sin^2\frac{A}{2}$	$1-2\sin^2\frac{A}{2}$
199	14	$4\cos^2A-3\cos A$	$4\cos^3A-3\cos A$
205	9	$1+\tan^2\frac{n}{2}$	$1+\tan^2\frac{x}{2}$
207	1	$4\cos^8\theta$	$4\cos^3\theta$
207	16	$\frac{\sqrt{5-1}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
208	17	$\cos 26^\circ$	$\cos 36^\circ$
210	2	ED	EC
210	14	$\sin 180^\circ-\frac{DC}{AC}=\frac{x}{2}=a$	$\sin 18^\circ=\frac{DC}{AC}=\frac{\frac{x}{2}}{a}$
222	10	$2\cos 48^\circ\times\frac{1}{2}+\cos 48^\circ$	$2\cos 40^\circ\times\frac{1}{2}-\cos 48^\circ$
223	9	$\sin 30-\sin\theta$	$\sin 3\theta-\sin\theta$
223	11	$\cos\theta-\cos\theta$	$\cos 4\theta-\cos\theta$
223	12	$\sin(2\alpha-3\beta)$	$\sin(2\alpha-2\beta)$
244	10	$\frac{1}{2}ab\sin B$	$\frac{1}{2}ab\sin C$
249	10	பயிற்சி	பயிற்சி 9
250	14	$\frac{C^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}$	$\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}$
251	11	$C^2\cos(A-B)$	$c^2\cos(A-B)$
265	5	90^3	90°
265	21	$\tan A\ \frac{a}{c}$	$\tan A=\frac{a}{c}$
267	12	$\sin B\ \frac{CZ}{CB}$	$\sin B=\frac{CZ}{CB}$
268	19	$7\theta^\circ$	70°

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
269	2	$C=40$	$c=40$
269	3	$C=32$	$c=32$
270	4	$\perp A \perp B \perp C$	$\angle A, \angle B, \angle C$
276	8	$b^2+c^2-bc \cos A$	$b^2+c^2-2bc \cos A$
276	26	$C=7$	$c=7$
284	3	$C<b$	$c<b$
296	12	$\tan x \cot (\pi+x)$	$\tan x, \tan (\pi+x)$
299	10	$x\ 90^\circ$	$x, 90^\circ$
300	1	$x\ 90^\circ$	$x, 90^\circ$
300	4	$x\ 180$	$x, 180^\circ$
300	11	$x\ 270$	$x, 270$
305	11	$\cos^2 A-1$	$2\cos^2 A-1$
306	7	$==2R$	$=2R$

கோண கணித விடைகள்

பக்கம்	பயிற்சி	கேள்வி எண்	பிழை	திருத்தம்
308	2(ii)	7	5	7
308	2(iii)	1(4)	-6	-1
309	3	9	$20(3+\sqrt{3})$ மீ.	$20(3+\sqrt{3})$மீ; $20\sqrt{3}$ மீ.
309	3	10	$10(3-\sqrt{3})$ மீ.	$30(3-\sqrt{3})$ மீ.
310	7	(3)	$2\cos 12\theta \cos 0$	$2\cos 12\theta \cos 3\theta$
310	7	(8)	$\sin 18A+\sin 3A$	$\sin 18A+\sin 8A$
310	11(i)	3	$c=43^\circ 44'$	$\angle C=43^\circ 44'$
311	11(iv)	4	$\angle A=37^\circ 17'$	$\angle A=37^\circ 5'$
312	11(v)	9	$30, 90^\circ, 36^\circ 52'$	$a=30$ $\angle C=90^\circ$ $\angle A=36^\circ 52'$
312	11(v)	12	$\angle C=26^\circ 31'$	$\angle C=26^\circ 30'$
312	12	17	$61^\circ 21'$	$61^\circ 20'$

(B) இரண்டாவதாக $\angle B$ ஒரு விரிகோணமாகக் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்வோம்.

(*a*) $c>b$ அல்லது $c=b$ ஆனல் $\angle C > \angle B$ அல்லது $\angle C = \angle B$ ஆகும். ஆனல் $\angle B$ ஒரு விரிகோணமாதலால் $\angle C$ம் ஒரு விரிகோணமாயிருக்க வேண்டும். இது இயலாதாதலின், இந்த நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட முக்கோணம் பெற முடியாது. இது எவ்வகையிலும் வராதவகை (impossible case) ஆகும்.

(*b*) $c<b$ ஆனல் $\angle C$க்குக் கிடைக்கப்பெற்ற குறுங்கோண மதிப்பு ஒன்று மட்டுமே பொருந்தும். ஏனெனில் ஒரு முக் கோணத்தில் இரண்டு விரிகோணங்கள் இருக்க முடியாது.

இப்போது $\angle A$க்கும் ஒரே ஒரு மதிப்புத்தான் கிடைக்கும். நமக்கு ஒரே ஒரு முக்கோணத் தீர்வுதான் கிடைக்கும்.

தொகுத்த முடிவு :

$\angle B$ குறுங் கோணமாய், $c \sin B > b < c$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் மட்டுமே இரண்டு முக்கோணங்கள் நமது தீர்வுகளாய்க் கிடைக்கும். இதுதான் ஈரடி வகை எனப்படும்.

மற்ற கட்டுப்பாடுகளில் ஒரே ஒரு முக்கோணம் மட்டுமே கிடைக்கும். அல்லது முக்கோணமே இல்லாமல் போய் விடும்.

11·8. வடிவகணித முறை விளக்கம் :

நாம் மேலே கண்ட *1, 2, 3 (1)*, *3 (2)* வகைகளிலும் முக் கோணங்களை வரைந்தால் 3 (2) தவிர மற்ற மூன்று வகைகளி லும் ஒரே ஒரு முக்கோணம் மட்டும் தான் வரைய முடியும்.

3 (2) முறையில் மட்டும் சில சந்தர்ப்பங்களில் ஒரு முக் கோணமும், மற்றும் சில சந்தர்ப்பங்களில் இரண்டு முக் கோணங்களும் வரையலாம். மற்றும் சில சமயங்களில் முக் கோணமே கிடைக்காதும் போகலாம்.

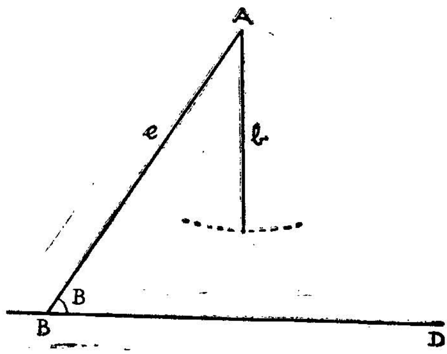
11·8·1. ஈரடி வகைப்பட்ட முக்கோணத் தீர்வுகளை வடிவ கணித முறைப்படி முக்கோணம் அமைத்துப் பார்த்தால் வேறு பாடுகள் யாவும் நமக்கு நன்கு புலனாகும்.

(A) $\angle B$ குறுங்கோணமெனக் கொள்வோம்.

BD என்னும் நேர்க்கோடு வரைக. $\angle DBA = \angle B$ ஆகவும் $BA = c$ ஆகவும் இருக்கும்படி BA வரைக. Aஐ மையமாகவும்

bஐ ஆரமாகவும் வைத்து ஒருவில் வரைக. பின் குறிக்கப்பட்ட எது ஒன்றும் நேரலாம்.

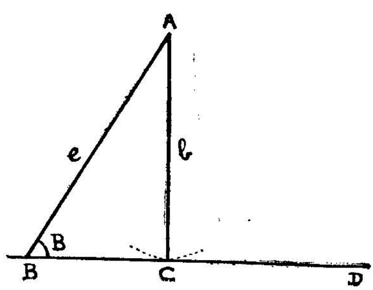
(a) அவ்வில் BDயைத் தொடவுமில்லை, வெட்டவுமில்லை என்ற நிலை ஏற்படலாம். அப்போது முக்கோணம் எதுவும் வரைய இயலாது.



(படம் 42)

படம் 42 பார்க்க. இங்கு $c \sin B > b$.

(b) அவ்வில் BDஐ C-ல் தொட்டுக்கொண்டு செல்லலாம். அப்போது ஒரு முக்கோணம் (ABC) மட்டும் வரைய முடியும். படம் 43. பார்க்க.

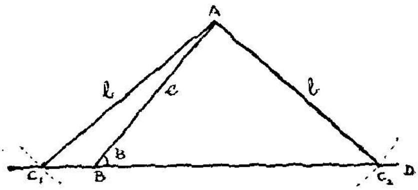


(படம் 43)

அப்போது AC, BDக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

இங்கு $c \sin B = b$. $\underline{|C} = 90^c$. செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும்.

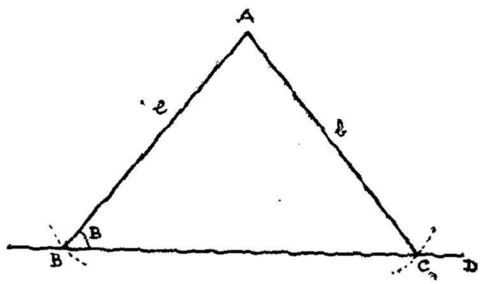
(c) (1) அவ்வில் BDஐ, B-ன் இருபுறங்களிலும் ஒவ்வோரிடத்தில் (C_1, C_2) வெட்டலாம். அப்போது இரு முக்கோணங்கள் (ABC_1, ABC_2) கிடைக்கும். படம் 44. பார்க்க.



(படம் 44)

ஆனால் △ ABC_1ல் கோணம் ABC_1 என்பது $\underline{|B}$ ன் நிமிர்க்கும் கோணமாகுமேயொழிய கொடுக்கப்பட்ட $\underline{|B}$ க்குச் சமமாகாது. ஆகவே △ ABC_1 பொருந்தாது. △ ABC_2 ஒன்று மட்டுமே பொருத்தமான தீர்வாகும். இங்கு $b>c$; $c \sin B<b$.

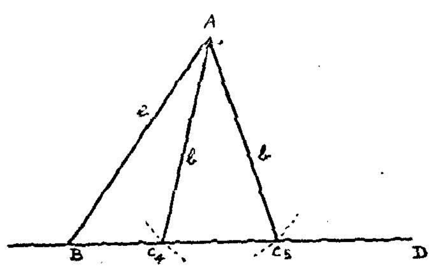
(2) $b=c$ ஆக இருக்குமாயின் அவ்வில் BDஐ C_3 என்ற இடத்தில் வெட்டும்; மேலும் B என்ற இடத்திலேயே மறுபடியும் வெட்டும். படம் 45 பார்க்க.



(படம் 45)

அப்போது △ ABC_3 ஒன்று மட்டும் தீர்வாகும். அது ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் ஆகும். இங்கு $b=c$.

(3) அவ்வில் BDஐ, Bன் ஒரே பக்கத்தில் இரு இடங்களில் (C_4, C_5) வெட்டலாம். படம். 46 பார்க்க.

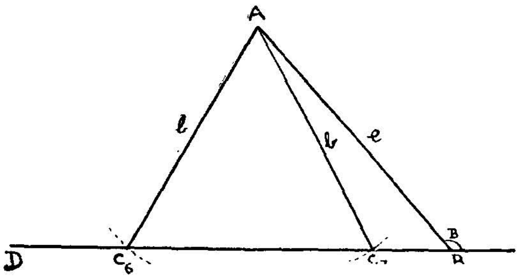


(படம் 46)

இப்போது இரு முக்கோணங்கள் (ABC_4, ABC_5) வரையலாம். இரண்டு முக்கோணங்களும் பொருத்தமான தீர்வுகளாகும். இங்கு $c \sin B < b < c$ (இதுவே ஈரடிவகை.)

(B) $\underline{|B}$ விரிகோணமெனக் கொள்வோம்.

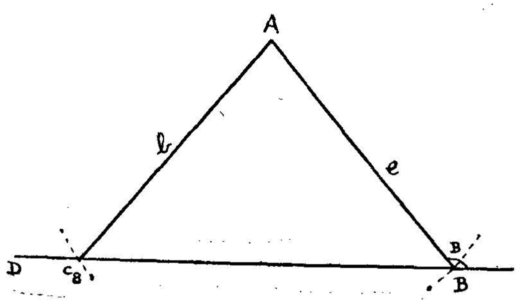
(a) $b < c$ ஆக இருக்குமாயின் அவ்வில் BDஐ இரு இடங்களில் (c_6, c_7) வெட்டும். இப்போது இரு முக்கோணங்கள் (ABC_6, ABC_7) கிடைக்கும். படம். 47 பார்க்க.



(படம் 47)

ஆனால் இவ்விரு முக்கோணங்களும் தீர்வாகா. ஏனெனில் ABC_6, ABC_7 என்ற முக்கோணங்களில் ABC_6 என்ற கோணமும் ABC_7 என்ற கோணமும் விரிகோணம் Bக்குச் சமமாகா. அவைகள் $\underline{|B}$ன் நிமிர்க்கும் கோணங்கள் மட்டுமேயாகும். எனவே இரண்டும் பொருத்தமான தீர்வுகள் அல்ல.

(b) $b = c$ ஆக இருக்குமாயின் வில் BDஐ c_8ல் வெட்டுவதோடு மட்டுமல்லாமல் Bயிலேயே மறுபடியும் வெட்டும். அதனால் $\triangle ABC_8$ மட்டும் வரையலாம். படம். 48 பார்க்க.

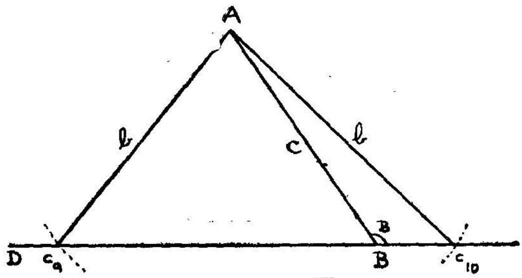


(படம் 48)

ஆனால் அது பொருத்தமான தீர்வாகாது. ஏனெனில் ABC_8 என்ற கோணம் விரிகோணம் Bக்குச் சமமாகாது; அதன்

நிமிர்க்கும் கோணத்திற்கு மட்டுமே சமமாகும். எனவே இங்கு ஒரு முக்கோணமும் தீர்வாகக் கிடைக்காது:

(c) $b > c$ ஆக இருக்குமாயின் அவ்வில் BDஐ இருபுறங்களிலும் ஒவ்வோர் இடத்தில் (C_9, C_{10}) வெட்டும். அதனால் இரு முக்கோணங்கள் (ABC_9, ABC_{10}) வரையலாம். படம் 49 பார்க்க.



(படம் 49)

இதில் $\triangle ABC_{10}$ ஒன்று மட்டுமே பொருத்தமான தீர்வாகும். $\triangle ABC_9$ என்ற கோணம் விரிகோணம் Bக்குச் சமமாகாது; அதன் நிமிர்க்கும் கோணத்திற்கு மட்டுமே சமமாகும். எனவே $\triangle ABC_9$ பொருந்தாத் தீர்வாகும்.

இவை யாவையும் தொகுத்துக் கூறுமிடத்து:

(A) $\underline{|B}$ ஒரு குறுங்கோணமாயின்,

(a) $c \sin B > b$ ஆனால் முக்கோணமில்லை;

(b) $c \sin B = b$ ஆனால் ஒரே ஒரு செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும்; $\underline{|C} = 90°$.;

(c) $c \sin B < b$ என்ற நின்ற நிபந்தனையில்

(i) $b > c$ ஆனால் ஒரே ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும். $\underline{|C}$ குறுங்கோணம்.

(2) $b = c$ ஆனால் ஒரே ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் கிடைக்கும் $\underline{|C} = \underline{|B}$.

3. $b < c$ ஆனால், ஈரடி வகையாக இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்; $\underline{|C}$ = ஒரு குறுங்கோணம் θ; மேலும் மற்றொரு மதிப்புடைய $\underline{|C} = 180° - \theta$ ஆகும்.

(B) $\underline{|B}$ ஒரு விரிகோணமாயின்,

(a) $c \geq b$ ஆனால் முக்கோணமில்லை.

(b) $C < b$ ஆனால் ஒரே ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும். $\underline{|C}$ = ஒரு குறுங்கோணம்.

(எ-கா.) (1) $a = 7{\cdot}13;\ b = 4{\cdot}41;\ \underline{|A} = 137°$ எனின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A$$

மகை $\sin B$ = மகை b + மகை $\sin A$ − மகை a
= மகை $4{\cdot}41$ + மகை $\sin(180 - 137)$ − மகை $7{\cdot}13$
$= 0{\cdot}6444 + \bar{1}.8338 - 0{\cdot}8531$
$= \bar{1}.6251$

$\therefore\ \underline{|B} = 24°\ 57'$

அல்லது $\underline{|B} = 180° - 24°57'$

$\underline{|B} = 155°3'$ பொருந்தாது. ஏனெனில் ஏற்கனவே $\underline{|A}$ ஒரு விரிகோணம்.

$$\underline{|C} = 180° - 24°\ 57' - 137°$$
$$= 18°\ 3'$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore\ c = \frac{b}{\sin B} \sin C$$

மகை c = மகை b + மகை $\sin C$ − மகை $\sin B$
= மகை $4{\cdot}41$ + மகை $\sin 18°3'$ − மகை $\sin 24°57'$
$= 0{\cdot}6444 + \bar{1}.4911 - \bar{1}{\cdot}6251$
$= 0{\cdot}5104$

$\therefore\ c$ = இன மகை $(0{\cdot}5104)$
$= 3{\cdot}24$

எனவே $\underline{|B} = 24°57'$
$\underline{|c} = 18°3'$
$c = 3{\cdot}24$

எ-கா. (2) $a = 126{\cdot}3;\ b = 178{\cdot}7;\ \underline{|A} = 42°13'$ எனின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \quad \sin B = \frac{b}{a} \sin A$$

$\therefore$ மகை $\sin B =$ மகை $b +$ மகை $\sin A -$ மகை a

$\therefore$ மகை $\sin B =$ மகை $178{\cdot}7 +$ மகை $\sin 42°13' -$ மகை $126{\cdot}3$

$= 2{\cdot}2521 + \bar{1}{\cdot}8273 - 2{\cdot}1014$

$= \bar{1}{\cdot}9780$

$\therefore \quad \angle B = 71{\cdot}54'$ அல்லது $108°6'$

$\because$ $b > a$ அதாவது $\angle B > \angle A$. எனவே $\angle B$க்குரிய இரண்டு மதிப்புக்களும் பொருந்தும்.

அப்போது $\angle C = 65°53'$ அல்லது $29°41'$

$\angle C = 65°53'$ எனக் கொண்டால்

$$c = \frac{b}{\sin B} \sin C$$

மகை $c =$ மகை $b +$ மகை $\sin C -$ மகை $\sin B$

$=$ மகை $178{\cdot}7 +$ மகை $\sin 65°\ 53' -$ மகை $\sin\ 71°54'$

$= 2{\cdot}2521 + \bar{1}{\cdot}9604 - \bar{1}\ 9780$

$= 2{\cdot}2345$

$\therefore\ c = 171{\cdot}6$

அல்லது $\angle C = 29°\ 41'$ எனக் கொண்டால்

மகை $c =$ மகை $178{\cdot}7 +$ மகை $\sin 29°\ 41' -$ மகை $\sin 108°\ 6'$

$= 2{\cdot}2521 + \bar{1}{\cdot}6948 - \bar{1}{\cdot}9780$

$= 1{\cdot}9689$

$\therefore\ c = 93{\cdot}09$

இது ஈரடி வகைப்படும். இரு தீர்வுகளும் தனித் தனியே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

முதல் தீர்வு	இரண்டாவது தீர்வு
$a = 126{\cdot}3$	$a = 126{\cdot}3$
$b = 178{\cdot}7$	$b = 178{\cdot}7$
$c = 171{\cdot}6$	$c = 93{\cdot}09$
$\angle A = 42°\ 13'$	$\angle A = 42{\cdot}13'$
$\angle B = 71°\ 54$	$\angle B = 108°\ 6'$
$\angle C = 65°\ 53'$	$\angle C = 29°\ 41'$

(எ-கா.) (3) $a = 45$; $b = 23{\cdot}58$; $\angle B = 31^\circ\ 36'$ எனின் அம் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\sin A = \frac{a}{b} \sin B$$

$$= \frac{45 \times \sin 31^\circ\ 36'}{23{\cdot}58}$$

$$= \frac{45 \times 0{\cdot}5240}{23{\cdot}58}$$

$$= 1$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - 31^\circ\ 36'$$

$$= 58^\circ\ 24'$$

$$\sin C = \frac{c}{a}$$

$$\therefore c = a \times \sin C$$

$$= 45 \times \sin 58^\circ\ 24'$$

$$= 45 \times 0{\cdot}8517$$

$$= 38{\cdot}33$$

எனவே $c = 38{\cdot}33$

$\angle A = 90^\circ$

$\angle C = 58^\circ\ 24'$

கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் உறுப்புக்களைக் கொண்டு வடிவ கணித முறையில் ஈரடி வகை முக்கோணங்களை வரைந்து சரி பார்த்துத் தீர்க்கவும்.

(1) $c = 5$ செ.மீ; $b = 3$ செ.மீ; $\angle B = 40^\circ$. தீர்வு இல்லை.

(2) $c = 5$ செ.மீ; $b = 2{\cdot}5$ செ.மீ; $\angle B = 30^\circ$. செங்கோண முக்கோணம்.

(3) $c=4$ செ.மீ; $b=6$ செ மீ; $\underline{|B}=40°$. ஒரு தீர்வு உண்டு.

(4) $c=4$ செ.மீ; $b=4$ செ.மீ; $\underline{|B}=40°$. இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்று மட்டும்.

(5) $c=6$ செ.மீ; $b=4$ செ.மீ; $\underline{|B}=40°$. ஈரடி வகை.

(6) $c=6$ செ.மீ; $b=4$ செ.மீ; $\underline{|B}=140°$. தீர்வு இல்லை.

(7) $c=4$ செ.மீ; $b=4$ செ.மீ; $\underline{|B}=140°$. தீர்வு இல்லை.

(8) $c=4$ செ.மீ; $b=6$ செ.மீ; $\underline{|B}=140°$. ஒரு தீர்வு உண்டு.

பயிற்சி 11 (v)

பின்வரும் முக்கோணங்களை விடுவி : ஈரடிவகையானல் இரண்டு தீர்வுகளும் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

(1) $a=256$; $b=315$; $\underline{|A}=31°42'$

(2) $a=114$; $b=90$: $\underline{|B}=20°50'$

(3) $a=7$; $c=10$; $\underline{|A}=40°27'$

(4) $b=\sqrt{6}$; $c=2\sqrt{3}$; $\underline{|B}=30°$

(5) $a=12$; $b=10$; $\underline{|A}=40°$

(6) $a=50$; $b=70$; $\underline{|A}=62°$

(7) $a=198{\cdot}2$; $b=413{\cdot}8$ $\underline{|A}=29°33'$

(8) $a=4{\cdot}41$; $c=7{\cdot}13$ $\underline{|C}=137°$

(9) $c=50$; $b=40$; $\underline{|B}=53°8'$

(10) $c=110$; $a=99$; $\underline{|B}=64°9'$

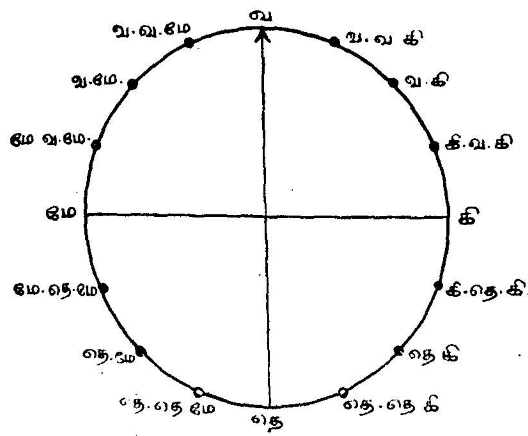
(11) $a=525$; $c=421$; $\underline{|A}=130°50'$

(12) $a=322$; $c=212$; $\underline{|B}=110°50'$

12. உயரங்களும் தொலைகளும்

(Heights and distances):

12·1. நாம் பகுதி 3இல் செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், கோணங்களின் தொடர்புகளைப் பயன்படுத்தி உயரங்களும் தொலைகளும் உள்ள சில எளிய கணக்குகளைப் பார்த்தோம். இப் பகுதியில் முக்கோணத்தின் தீர்வுகளுக்குரிய வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

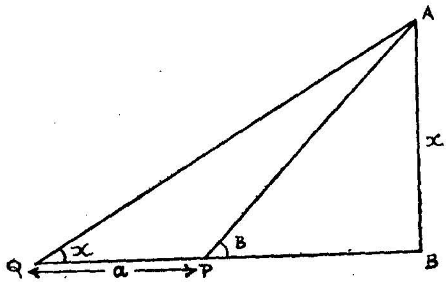


(படம் 50)

நாம் வடக்கு, தெற்கு, கிழக்கு, மேற்கு ஆகிய நான்கு திசைகளை அறிவோம். வடக்கு-கிழக்கு திசைகளுக்கு இடைப்பட்ட 90°ஐ சம கூறுக்கும் கோடு வடகிழக்குத் திசையைக் குறிக்கும். வடக்கு-வட கிழக்கு திசைகளுக்கிடைப்பட்ட 45°ஐ சம கூறுக்கும் கோடு வடக்கு வடகிழக்குத் (North North East) திசையைக் குறிக்கும். அவ்வாறே கிழக்கு-வடகிழக்குத் திசைகளுக்கிடைப்பட்ட 45°ஐ சமகூறுக்கும் கோடு கிழக்கு

வடகிழக்கு (East north east) திசையைக் குறிக்கும். இவ்வாறே மற்ற திசைகள் பெறப்படும். படத்தில் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் திசைகளைக் காண்க.

12·2. நேரில் அளந்தறிய முடியாத கோபுரங்களின் உயரங்களை இரு புள்ளிகளிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்களைக் கண்டு கணக்கிட்டறிதல்.



(படம் 51)

கோபுரம் ABல், A அதன் உச்சி; B அதன் பாதம். P, Q என்பன Bயிலிருந்து வரைந்த நேர்கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகள். $AB = x$ எனக் கொள்க. $\angle AQB = \alpha$ எனவும் $\angle APB = \beta$ எனவும் கொள்க. $QP = a$ என அளந்தறிவோம்.

$$\triangle APB\text{ல்}\quad \frac{x}{AP} = \sin\beta$$

$$\triangle AQP\text{ல்}\quad \frac{AP}{QP} = \frac{\sin AQP}{\sin PAQ} = \frac{\sin AQP}{\sin(APB - AQB)}$$

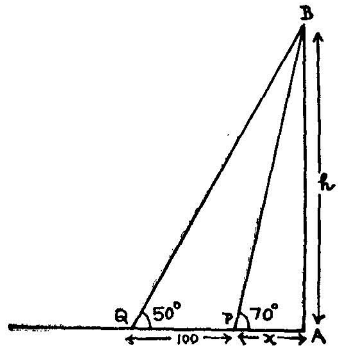
$$\therefore \frac{AP}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore \frac{x}{AP}\cdot\frac{AP}{a} = \sin\beta\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore x = a\frac{\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

இதிலிருந்து கோபுரத்தின் உயரம் $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ என அறியலாம்.

(எ-கா.) (1) ஒரு கோபுரத்தின் பாதம் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டில் உள்ள இரு இடங்களில் இருந்து அக் கோபுரத்தின் உச்சியைக் காணும்போது அதன் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 50°, 70°; அவ்விருவிடங்களுக்கிடைப் பட்ட தூரம் 100 மீட்டர் எனின் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?



(படம் 52)

கோபுரத்தின் உயரம் AB $=h$ எனக் கொள்வோம். கோபுரத்தின் அடியில் இருந்து P, Q என்ற இடங்களின் தூரம் x, $x+100$ மீட்டர்களெனக் கொள்வோம்.

$$\frac{AB}{AP}=\frac{h}{x}=\tan 70^\circ$$

$$=2{\cdot}7475$$

$$\therefore\quad x=\frac{h}{2{\cdot}7475}$$

மேலும், $\dfrac{AB}{AQ}=\dfrac{h}{100+x}=\tan 50^\circ$

$$=1{\cdot}1918$$

$$\therefore\quad \frac{h}{1{\cdot}1918}=100+x$$

$$=100+\frac{h}{2{\cdot}7475}$$

$$\therefore\ h\left(\frac{1}{1{\cdot}1918}-\frac{1}{2{\cdot}7475}\right)=100$$

$$h\,(2{\cdot}7475-1{\cdot}1918)=100\times2{\cdot}7475\times1{\cdot}1918$$

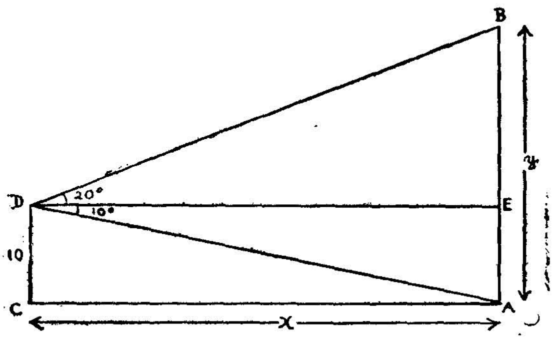
$$h\,(1{\cdot}5557)=100\times2{\cdot}7475\times1{\cdot}1918$$

$$\therefore\ h=\frac{100\times2{\cdot}7475\times1{\cdot}1918}{1{\cdot}5557}$$

மடக்கை வாய்பாட்டைக்கொண்டு கணக்கிட $h=210{\cdot}4$ மீட்டர்கள் எனக் கிடைக்கும்.

∴ கோபுரத்தின் உயரம் $=210{\cdot}4$ மீட்டர்கள்.

(எ-கா.) (2) 10 மீ. உயரமுள்ள ஒரு கட்டிடத்திலிருந்து ஒரு கோபுர உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 20°. கோபுர அடியின் இறக்கக் கோணம் 10° எனின் கோபுரத்தின் உயரமென்ன? கோபுரத்திற்கும் கட்டிடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரமென்ன?



(படம் 58)

கோபுரத்தின் உயரம் $AB=y$ எனக் கொள்க. $AC=x$ கோபுரத்திற்கும் கட்டிடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் எனக் கொள்க. CD கட்டிடத்தின் உயரம் $=10$மீ. எனக் கொள்க.

$$\frac{CD}{CA}=\frac{10}{x}=\tan 10^\circ$$

$$=0{\cdot}1763$$

$$\therefore\ x=\frac{10}{0{\cdot}1763}$$

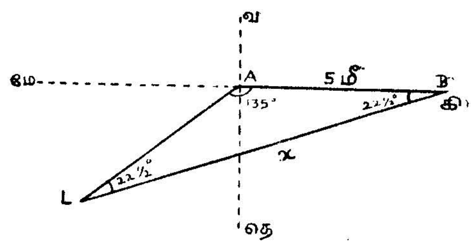
$$=56{\cdot}72$$

மேலும் $\dfrac{BE}{ED}=\dfrac{y-10}{x}=\tan 20^\circ$

$$\therefore\ y-10 = x \tan 20^\circ$$
$$= 56{\cdot}72 \times 0{\cdot}3640$$
$$= 20{\cdot}65$$
$$\therefore\ y = 30{\cdot}65$$

எனவே கோபுரத்தின் உயரம் 30·65 மீட்டர்கள். கோபுரத்திற்கும் கட்டிடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் 56·72 மீட்டர்கள்.

(எ–கா.) (3) ஒரு கப்பலிலிருந்து ஒரு கலங்கரை விளக்கம் தென் மேற்கே தோன்றுகிறது. பின்னர் கப்பல் நேர்கிழக்கே 5 கி.மீ. சென்றபின் அக்கலங்கரை விளக்கம் மேற்கு–தென் மேற்கே தோன்றுகிறதெனில் இந்த நிலையில் கப்பலுக்கும் கலங்கரை விளக்கத்திற்குமுள்ள தூரமென்ன ?



(படம் 54)

A கப்பலின் முதனிலை ; AB = 5 கி.மீ; B கப்பலின் இரண்டாவது நிலை. L கலங்கரை விளக்கம்.

கலங்கரை விளக்கத்திற்கும் கப்பலுக்குமிடையே உள்ள தூரம் x எனக் கொள்வோம். (இரண்டாவது நிலையிலிருந்து)

இப்போது $$\frac{x}{\sin 135^\circ} = \frac{5}{\sin 22\frac{1}{2}^\circ}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{5}{0{\cdot}3827}$$

$$\therefore\ x = \frac{5}{\sqrt{2} \times 0{\cdot}3827}$$

$$= \frac{5}{1{\cdot}4142 \times 0{\cdot}3827}$$

$$= 9{\cdot}24$$

கப்பலின் இரண்டாவது நிலையிலிருந்து, இரண்டிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் 9·24 கி. மீ.

பயிற்சி 12

(1) 400 மீ. தூரத்தில் உள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் ஏற்றக் கோணம் 40° எனின் அக்கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரமென்ன ?

(2) A என்ற புள்ளியிலிருந்து 15 மீ. உயரமுள்ள ஒரு கொடிக்கம்பத்தின் ஏற்றக் கோணம் 50°. கம்பத்திற்கும் புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரமென்ன ?

(3) 100 மீ. கயிற்றின் ஒரு முனையில் ஒரு பட்டம் பறக்கிறது. கயிற்றின் மற்றொரு முனை தரை மட்டத்திலிருக்கிறது. கயிற்றின் ஏற்றக் கோணம் 50° எனின் தரைக்கும் பட்டத்திற்கும் உள்ள குத்துயரம் என்ன ?

(4) ஒரு குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 25°. குன்றின் உச்சியை நோக்கி 100 மீ. சென்றபின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 65° எனின் குன்றின் உயரமென்ன ?

(5) ஒரு கட்டிடத்திலிருந்து 50 மீ. தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில், அக் கட்டடத்தின் மீதுள்ள கொடிக்கம்ப அடி, உச்சிகளின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 15°, 25° எனின் கொடிக் கம்பத்தின் உயரமென்ன ?

(6) ஒரு கோபுரத்தின் கிழக்கு, மேற்கு பக்கங்களில் A, B என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 20°, 45°. AB = 300 மீ. எனின் கோபுரத்தின் உயரமென்ன? கோபுரத்தின் அடிக்கும் Aக்கும் இடையே உள்ள தூரமென்ன ?

(7) ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் அடியோடு ஒட்டிய நேர்ப்பாதையில் இரு தொலைக்கற்கள் இருக்கின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் 60 மீ. அதன் உச்சியிலிருந்து அத் தொலைக்கற்களின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 40°, 70° எனின் தொலைக்கற்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

(8) Aயிலிருந்து ஒருவன் கிழக்கு நோக்கி 100 மீ. சென்று Bயை அடைகிறான். Bயிலிருந்து தென்கிழக்கில் சென்று Cயை அடைகிறான். $\angle BAC = 30°$ எனின் ACன் நீளமென்ன ? BCன் நீளமென்ன ?

(9) ஒரு குன்றின்மீது 15 மீ. உயரமுள்ள ஒரு கோபுரம் அமைந்திருக்கிறது. தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 40°. கோபுர அடியின் ஏற்றக் கோணம் 35° எனின் குன்றின் உயரமென்ன?

(10) ஒரு கலங்கரை விளக்கத்திலிருந்து ஒரு கப்பல் தென்கிழக்கே 10 கி.மீ. தூரத்தில் நின்றுகொண்டிருக்கிறது. காலை 9-மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகத்தில் அக்கப்பல் மேற்கு நோக்கிப் புறப்பட்டுச் செல்கிறது. கொஞ்ச நேரத்திற்குப் பின்பு கப்பல் கலங்கரை விளக்கத்திலிருந்து 8 கி.மீ. தூரத்தி லிருக்கும்போது நேரத்தைக் கணக்கிடு.

(11) ஒரு கப்பலிலிருந்து ஒரு கலங்கரை விளக்கம் தென் மேற்கே தோன்றுகிறது. பிறகு கப்பல் அங்கிருந்து தென் திசைக்கு மேற்கே 15° சாய்வுள்ள திசையில் 12 கி.மீ. சென்றபின் கலங்கரை விளக்கம் கப்பலுக்கு நேர்வடக்கே தோன்றுகிறது. கப்பலின் இருநிலைகளிலிருந்தும் கலங்கரை விளக்கத்திற்கு உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடு.

(12) ஒரு குளத்தின் நீர்மட்டத்திற்குமேல் 5 மீ. உயரமான இடத்திலிருந்து ஒரு மர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 10°. நீரில், நிழல் உச்சியின் இறக்கக்கோணம் 15° $50'$ எனின் அம்மரத் தின் உயரத்தைக் கணக்கிடு.

(13) ஒருவர் இரு புள்ளிகள் A, Bஐ முறையே நேர் வடக் கிலும், வடக்கிலிருந்து மேற்குப்பக்கம் 30° சாய்வுள்ள திசை யிலும் காணுகிறார். அவர் பின்பு வடமேற்காக ஒரு கிலோ மீட்டர் சென்ற பின் A, B, இரண்டையும் முறையே வட கிழக் கிலும் நேர் கிழக்கிலும் காண்கிறார். A, Bகளுக்கிடையேயுள்ள தூரமென்ன?

(14) கடலோரத்திலிருக்கும் 100 மீ. உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் மேலிருந்து பார்க்கும் ஒருவன் குன்றை நோக்கி வரும் ஒரு படகின் இறக்கக் கோணங்கள் 10 நிமிடத்தில் 34°யி லிருந்து 52° ஆக மாறுவதைக் கண்டால் படகின் வேக மென்ன?

(15) ஒரு விமானத்திலிருந்து இரு தொலைக்கற்களின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 27° $13'$; 67° $53'$. தொலைக்கற் களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 3 கி. மீ. விமானம் எவ்வளவு உயரத்திலிருக்கிறதென்பதைக் கணக்கிடு. படம் வரைந்து சரிபார்த்துக்கொள்ளவும்.

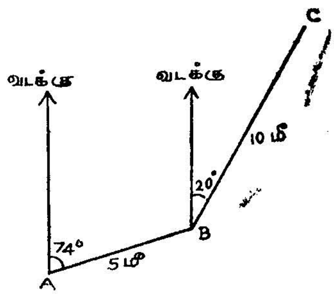
(விமானத்திலிருந்து தரைக்கு வரையப்படும், குத்துக் கோட்டுப் பாதம், A, B மூன்றும் ஒரே நேர்க்கோட்டிலுள்ளன வெனக் கொள்க.)

(16) 50மீ. உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்தும், உச்சியிலிருந்தும் ஒரு குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 18° 35′, 15° 20′ எனின் குன்றின் உயரமென்ன?

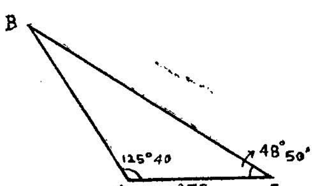
(17) 11·5, 15, 22·5 செ.மீ ஆரமுள்ள மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று வெளியே தொட்டுக் கொண்டிருக்கின்றன. வட்ட மையத்தை இணைத்தால் கிடைக்கும் முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் காண்க.

(18) ஒரு கம்பு கதிரவன் பக்கமாக, குத்துக்கோட்டிலிருந்து 10° 15′ சாய்வாக இருக்கிறது. கதிரவன் 40° 35′ ஏற்றக் கோணத்திலிருக்கும்போது அதன் நிழலின் நீளம் 122·25 செ.மீ. எனின் கம்பின் நீளமென்ன?

(19) படத்தில் காட்டியபடி A, B, C என்ற 3 புள்ளிகள் இருக்கின்றன. ACன் நீளமென்ன? ACன் திசையென்ன? கணக்கிட்டுப் பார்த்துப் படம் வரைந்து சரி பார்க்க.



(படம் 55)



(படம் 56)

(20) படத்தில் காட்டியபடி A, B என்ற புள்ளிகள் இருக்கின்றன. AC = 275. மீ. $\angle CAB = 125°40'$; $\angle ACB = 48°\ 50'$. ABன் நீளமென்ன? படம் வரைந்து சரி பார்க்கவும்.

13. கோணகணிதச் சார்பலன்களின் கோட்டுப் படங்கள்

(Graphs of trigonometrical functions):

13·1. நாம் பகுதி 4இல் x எத்தகைய மதிப்புடைய தாயினும் $\sin(2\pi+x)=\sin x$ எனக் கண்டோம். எனவே xன் மதிப்பு $0°$ விலிருந்து $360°$ வரை இருக்கும்போது $\sin x$ன் மதிப்பைத் தெரிந்து கொண்டால், x எந்த மதிப்புடையதா யினும் $\sin x$ன் மதிப்பையறியலாம். இத்தகைய சார்பலன் களையே போழ்தில் மீளும் சார்பலன்கள் (periodic function) எனக் குறிப்பிடுகின்றோம். அதாவது நெடுக்கை சார்பலன் (sine function) ஒரு, போழ்தில் மீளும் சார்பலன் ஆகும். இதன் போழ்து (period) 2π ஆகும்.

இவ்வாறே $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ யாவும், போழ்தில் மீளும் சார்பலன்களாகும். இவைகளின் போழ்துகள் 2π ஆகும். ஆனல் $\tan(\pi+x)=\tan x$ $\cot(\pi+x)=\cot x$ என்றிருப்பதால் இவைகள் இரண்டும் πஐப் போழ்தாகக் கொண்ட கோண கணிதச் சார்பலன்களாகும்.

13·2. $y=\sin x$ன் கோட்டுப்படம் வரைதல்:

xன் மதிப்பு $0°$ யிலிருந்து $360°$க்கு உயரும்போது $\sin x$ கூட்டெண் மதிப்பையும், குறையெண் மதிப்பையும் பெறு கிறது.

(i) xன் மதிப்பு $0°$யிலிருந்து $90°$க்கு உயரும்போது $\sin x$ன் மதிப்பு 0விலிருந்து 1க்கு உயருகிறது.

(ii) xன் மதிப்பு $90°$ யிலிருந்து $270°$ க்கு உயரும்போது $\sin x$ன் மதிப்பு $+1$ லிருந்து -1க்குக் குறைந்து வருகிறது.

(iii) xன் மதிப்பு $270°$லிருந்து $360°$க்கு உயரும்போது, $\sin x$ன் மதிப்பு -1லிருந்து 0க்கு உயருகிறது.

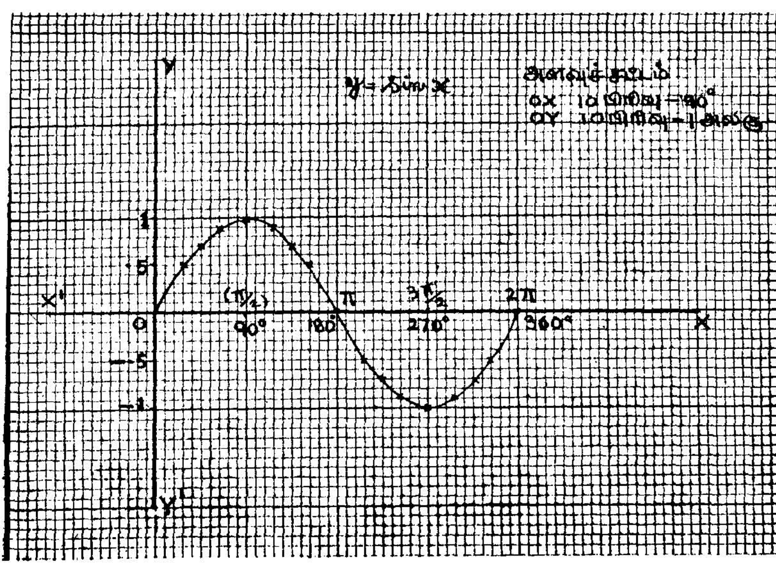
$y = \sin x$ எனக் கொள்வோம்.

xக்குப் பல மதிப்புக்கள் கொடுத்து அவைகளுக்குரிய y ன் மதிப்புக்களையும் கீழ் உள்ளவாறு அட்டவணையில் குறிப் போம்.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y ஏறத் தாழ	0	·5	·71	·87	1	·87	·71	·5	0

x	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
y ஏறத் தாழ	$-$·5	$-$.71	$-$.87	$-$1	$-$·87	$-$·71	$-$·5	0

O என்ற ஆய ஆதியின் வழியாக X'OX, Y'OY என்ற செங்கோண ஆய அச்சுக்களை எடுத்துக்கொள்வோம். X'OXல் xன் மதிப்பையும் Y'OYல் y ன் மதிப்பையும் தகுந்த அளவுச் சட்டத்தில் எடுத்து கோட்டுப் படத்தில் புள்ளிகளைக் குறிப்போம். அப்புள்ளிகளை ஒரு மெல்லிழை வரையாக இணைத்தால் sin x ன் கோட்டுப் படம் கிடைக்கும். 0° முதல் 360° வரையில் x – மதிப்புக்கள் பெறுகிறது.



(படம் 57)

13·3. $y = \cos x$ன் கோட்டுப்படம் வரைதல் :

xன் மதிப்பு 0°யிலிருந்து 360°க்கு உயரும்போது cos x கூட்டெண் மதிப்பையும் குறையெண் மதிப்பையும் பெறுகிறது.

(i) xன் மதிப்பு 0°யிலிருந்து 180°க்கு உயரும்போது cos xன் மதிப்பு 1லிருந்து -1க்குக் குறைகிறது.

(ii) xன் மதிப்பு 180°யிலிருந்து 360°க்கு உயரும்போது cos xன் மதிப்பு -1 லிருந்து 1க்கு உயருகிறது.

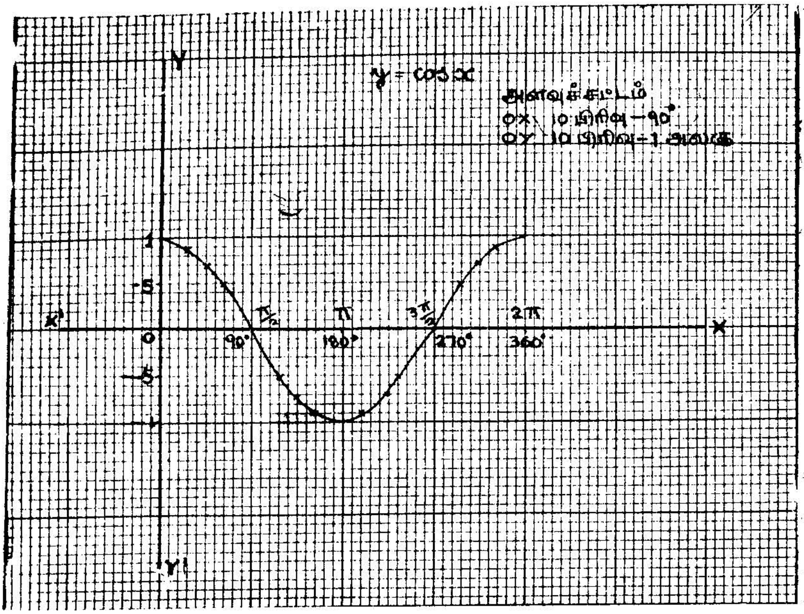
$y = \cos x$ எனக்கொள்வோம்.

xக்குப் பல மதிப்புக்கள் கொடுத்து அவைகளுக்குரிய yன் மதிப்புக்களையும் கீழ் உள்ளவாறு அட்டவணையில் குறிப்போம்.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y ஏறத்தாழ	1	·87	·71	·5	0	− ·5	− ·71	− ·87	− 1

x	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
y ஏறத்தாழ	− ·87	− ·71	− ·5	0	·5	·71	·87	1

X அச்சில் xன் மதிப்பையும், Y அச்சில் y ன் மதிப்பையும் தகுந்த அளவுச் சட்டத்தில் எடுத்து கோட்டுப் படத்தில் புள்ளிகளைக் குறிப்போம். அப்புள்ளிகளை ஒரு மெல்லிழை வரையாக இணைத்தால் cos xன் கோட்டுப்படம் கிடைக்கும். 0° முதல் 360° வரையில் x மதிப்புக்கள் பெறுகிறது.



(படம் 58)

13·4. $y = \tan x$ன் கோட்டுப் படம் வரைதல் :

$x = 90°$ ஆக இருக்கும்போது $\tan x = \infty$ (கந்தழி) ஆதலால் நாம் அப்புள்ளியைக் கோட்டுப்படத்தில் குறிக்க இயலாது. எனவே அத்தருணங்களில் நாம் xன் மதிப்பை $90°$க்குச் சற்று குறைவாகவும், சற்று அதிகமாகவும் கொண்டு $\tan x$ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

(i) $x - 0°$யிலிருந்து $90°$ க்குச் சிறிது குறைவான மதிப்பைப் பெறும்வரை $\tan x$ன் மதிப்பு 0 விலிருந்து ஒரு பெரிய கூட்டெண்ணுக்கு உயருகிறது.

(ii) x $90°$ஐ விடச் சிறிது அதிகமாக இருக்கும்போது ஒரு பெரிய குறையெண்ணாக இருக்கிறது. x $90°$க்குச் சிறிது குறைவான மதிப்பிலிருந்து $90°$க்குச் சிறிது அதிகமான மதிப்புக்கு மாறும்போது $\tan x$ன் மதிப்பு மிகப் பெரிய கூட்டெண்ணிலிருந்து மிகப் பெரிய குறையெண்ணுக்கு மாறுகிறது.

(iii) x 90°ஐவிடச் சிறிது அதிகமான மதிப்பிலிருந்து 180°க்கு உயரும்போது tan xன் மதிப்பு மிகப் பெரிய குறையெண்ணிலிருந்து பூச்சியத்தை அடைகிறது.

(iv) x 180°யிலிருந்து 270°குச் சிறிது குறைவான மதிப்பை அடையும்போது tan xன் மதிப்பு 0யிலிருந்து ஒரு மிகப் பெரிய கூட்டெண் மதிப்பைப் பெறுகிறது.

(v) மீண்டும் x-270°க்குச் சிறிது சற்று குறைவான மதிப்பிலிருந்து 270°க்குச் சிறிது அதிகமான மதிப்பைப் பெறும்போது tan xன் மதிப்பு மிகப் பெரிய கூட்டெண்ணிலிருந்து மிகப் பெரிய குறை யெண்ணுக்கு மாறுகிறது.

(vi) x 270°க்குச் சிறிது அதிகமான மதிப்பிலிருந்து 360°ஐ அடையும்போது tan xன் மதிப்பு மிகப் பெரிய குறையெண்ணிலிருந்து பூச்சியத்தை அடைகிறது.

$y = \tan x$ எனக் கொள்வோம்.

xக்குப் பல மதிப்புக்கள் கொடுத்து அவைகளுக்குரிய yன் மதிப்புக்களையும் கீழுள்ளவாறு அட்டவணையில் குறிப்போம்.

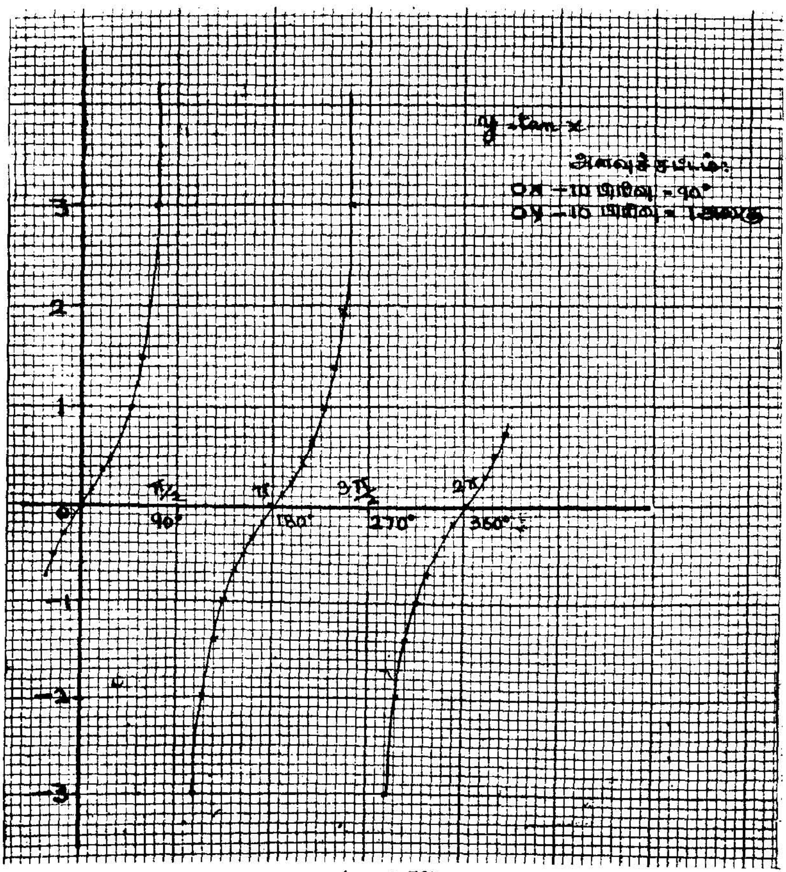
x	0	30°	45°	60°	90°-t	90°+t	120°	135°	150°	180°	210°
$y = \tan x$.	0	.58	1	1.73	N	− N	−1.73	− 1	- .58	0	.58

x	225°	240°	270°-t	270+t	300°	315°	330°	360°
$y = \tan x$	1	1.73	N	− N	-1.73	-1	−.58	0

குறிப்பு: t − ஒரு மிகச் சிறிய கூட்டெண்.

N − ஒரு மிகப் பெரிய கூட்டெண்.

X அச்சில் xன் மதிப்பையும் Y அச்சில் yன் மதிப்பையும் தகுந்த அளவுச் சட்டத்தில் எடுத்து கோட்டுப் படத்தில் புள்ளிகளைக் குறிப்போம். அப்புள்ளிகளை இணைத்தால் tan xன் கோட்டுப் படம் கிடைக்கும்.



(படம் 59)

குறிக்கப்பட்ட கோண கணிதத் தகவுகள்—அட்டவணை

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\propto$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\propto$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot θ	$\propto$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\propto$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\propto$
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\propto$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\propto$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
cosec θ	$\propto$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\propto$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\propto$

அனுபந்தம்

கோணகணிதம்

கவனத்திலிருக்க வேண்டிய வாய்பாடுகள்

(Formulae to be memorised) :

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$; $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

$\frac{1}{\sin\theta} = \mathrm{cosec}\,\theta$; $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

$\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$; $\frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$

II

கோணம் A / கோண கணிதத்தகவு	$-\theta$	$90-\theta$	$90+\theta$	$180-\theta$	$180+\theta$	$270-\theta$	$270+\theta$	$360-\theta$	$360+\theta$
sin A	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cos A	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tan A	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$
cot A	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$
sec A	$\sec\theta$	$\mathrm{cosec}\,\theta$	$-\mathrm{cosec}\,\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\mathrm{cosec}\,\theta$	$\mathrm{cosec}\,\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$
cosec A	$-\mathrm{cosec}\,\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\mathrm{cosec}\,\theta$	$-\mathrm{cosec}\,\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\mathrm{cosec}\,\theta$	$\mathrm{cosec}\,\theta$

III. கூட்டல், கழித்தல் வாய்பாடுகள்.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

IV. மடிகோண வாய்பாடுகள்.

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$=\cos^2 A-1$$

$$=1-2\sin^2 A$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$$

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

V $$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

VI. பெருக்கல் வாய்பாடுகள்.

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$$

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\cos D - \cos C = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

VII. முக்கோணத்தின் பண்புபற்றிய வாய்பாடுகள்.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\, ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\, ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\, ab}$$

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A = \tfrac{1}{2}\, ca \sin B$$

$$\triangle = \sqrt{s (s-a) (s-b) (s-c)}$$

$$\triangle = \frac{abc}{4R}$$

முக்கோணம் : கோணங்கள் A, B, C.

θ / கோண கணிதத் தகவு	$\frac{A}{2}$	$\frac{B}{2}$	$\frac{C}{2}$
sin θ	$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$	$\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$	$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
cos θ	$\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$	$\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$	$\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
tan θ	$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$	$\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$	$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2};\quad \tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2};$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

VIII. $r=\frac{\Delta}{s}$

$$r_1=\frac{\Delta}{s-a}$$

$$r_2=\frac{\Delta}{s-b}$$

$$r_3=\frac{\Delta}{s-c}$$

$$R=\frac{abc}{4\Delta}$$

விடைகள்

பயிற்சி 1

1. (1) $54^g\ 28'\ 49''$; $0{\cdot}8527^c$
   (2) $37^\circ\ 6'\ 9''$; $41^g\ 22'\ 50''$
   (3) $143^\circ\ 10'\ 55''$; $159^g\ 15'\ 46''$
   (4) $634^\circ\ 32'\ 49''$; $11{\cdot}0793^c$

2. $(n-2)\dfrac{\pi}{n}$ 3. $\cdot 2$ 4. $42^\circ\ 57'\ 16''$

பயிற்சி 2 (ii)

1. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\theta = \sqrt{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;
   $\sec\theta = 2$; $\cot\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$; $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$; $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{5}{3}$; $\sec\theta = \dfrac{5}{4}$;
   $\cot\theta = \dfrac{4}{3}$

3. $\sin\theta = \dfrac{7}{25}$; $\cos\theta = \dfrac{24}{25}$; $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{25}{7}$; $\sec\theta = \dfrac{25}{24}$
   $\cot\theta = \dfrac{24}{7}$

4. $-\dfrac{175}{337}$ 5. $\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$; $\dfrac{(p^2+q^2)^2}{4p^2q^2}$

பயிற்சி 2 (iii)

1. (1) 1
   (2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
   (3) $\dfrac{\sqrt{3}(5+\sqrt{3})}{6}$
   (4) -6
   (5) 1

2. (1) $\frac{3}{2}$
   (2) $\frac{3}{16}$
   (3) 0
   (4) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$
   (5) $4\frac{1}{3}$
   (6) 8
   (7) 5

3. (1) $\frac{1}{4}$ (2) 1 (3) 1 (4) 2

பயிற்சி 3

1. 13·86 மீ. 2. 86·6 மீ.
3. $10(3+\sqrt{3})$ மீ. 4. 146·42 மீ.
5. 169 மீ; 231. மீ. 6. 10·39 மீ.
7. 155·89 மீ; 90 மீ. 8. 78·87 மீ: 28·87 மீ.
9. $20(3+\sqrt{3})$ மீ. 10. $10(3-\sqrt{3})$ மீ.
11. $10(\sqrt{3}+2)$ மீ. 12. $75(\sqrt{3}+1)$ டெசி.மீ.
13. $30(\sqrt{3}+1)$ மீ. 14. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ மீ.
15. $40(\sqrt{3}+1)$ மீ.

பயிற்சி 4

(1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$
(3) 1 (4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
(5) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (6) 2
(7) -1 (8) -1
(9) 2 (10) $-2+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$
(11) 2 (12) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
(13) 1 (14) sin A cos A
(15) 3

பயிற்சி 5

1. $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$,
$\sqrt{3}-2$; $-\left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\right]$; $2-\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$.

10. $\frac{16}{65}$ 11. 1.

பயிற்சி 6 (ii)

3. (1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ (3) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

(4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

4. $\frac{7}{5\sqrt{2}}$

பயிற்சி 7

(1) $2 \sin 4\theta \cos 2\theta$ (2) $2 \cos 4\theta \sin 2\theta$

(3) $2 \cos 12\theta \cos 0$ (4) $-2 \sin 12\theta \sin 3\theta$

(5) $2 \sin 75° \cos 5°$ (6) $2 \sin 30° \sin 20°$

(7) $-2 \sin 3A \sin 2A$ (8) $\sin 18A + \sin 3A$

(9) $\cos 10A + \cos 4A$ (10) $\frac{1}{2} [\cos 4\theta - \cos 16\theta]$

(11) $\frac{1}{2} [\sin 9\theta - \sin 3\theta]$

பயிற்சி 10

1. (1) 630 (2) 30 (3) 1470

30. $R = 7{\cdot}5$ செ. மீ.

$r = 3$ செ. மீ. $r_1 = 6$ செ. மீ.

$r_2 = 9$ செ. மீ. $r_3 = 18$ செ. மீ.

பயிற்சி 11 (i)

1. $A = 40°$; $a = 25.71$; $b = 30{\cdot}64$
2. $C = 64°48'$; $a = 15{\cdot}05$; $b = 35{\cdot}36$
3. $A = 46°16'$; $c = 43°44'$ $c = 11{\cdot}96$
4. $A = 58°22'$; $B = 31°38'$ $c = 8{\cdot}6$
5. $1{\cdot}64$
6. $41°$; $42°12'$; $96°48'$; $4{\cdot}23$; $4{\cdot}331$; $6{\cdot}401$

பயிற்சி 11 (ii)

விடைகள் முறையே A, B, C என்ற கோணங்களில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

1. $24^\circ 45'$; $60^\circ 39'$; $94^\circ 36'$
2. $21^\circ 47'$; $38^\circ 13'$; 120°
3. 45° ; 120° ; 15°
4. $40^\circ 10'$; $82^\circ 58'$; $49^\circ 52'$
5. $60^\circ 10'$; $43^\circ 18'$; $76^\circ 32'$
6. $63^\circ 36'$; $42^\circ 9'$; $74^\circ 15'$
7. $37^\circ 29'$; $53^\circ 31'$; 89°
8. $130^\circ 42'$; $23^\circ 27'$; $25^\circ 51'$

பயிற்சி 11 (iii)

1. $a = 348{\cdot}5$; $b = 182{\cdot}8$; $\angle B = 80^\circ$
2. $a = 2$; $b = \sqrt{3} + 1$; $\angle C = 60^\circ$
3. $b = 1131$; $c = 2179$; $\angle C = 52^\circ 55'$
4. $a = 24{\cdot}65$; $c = 30{\cdot}3$; $\angle B = 99^\circ 30'$
5. $20{\cdot}976$.

பயிற்சி 11 (iv)

1. $c = 71{\cdot}42$; $\angle A = 47^\circ 10'$; $\angle B = 82^\circ 58'$
2. $b = 456{\cdot}6$; $\angle A = 37^\circ 29'$; $\angle C = 89^\circ$
3. $a = 215$; $\angle B = 28^\circ 26'$; $\angle C = 74^\circ 27'$
4. $b = 372{\cdot}5$; $\angle A = 37^\circ 17'$; $\angle C = 76^\circ 28'$
5. $c = 8$; $\angle A = 60^\circ$; $\angle B = 38^\circ 11'$
6. $a = 6{\cdot}325$; $\angle B = 27^\circ{\cdot}42'$; $\angle C = 50^\circ 46'$
7. $a = 4002$; $\angle B = 42^\circ 9'$; $\angle C = 74^\circ 15'$
8. $c = \sqrt{5}$; $\angle A = 39^\circ 13'$; $\angle B = 50^\circ 47'$

பயிற்சி 11 (v)

1. $\angle B = 40°17'$; $\angle C = 108°$; $c = 463·4$
   $\angle B = 139°43'$; $\angle C = 8°35'$; $c = 72·71$
2. $\angle A = 26°47'$; $\angle C = 132°23'$; $c = 186·8$
   $\angle A = 153°13'$; $\angle C = 5°57'$; $c = 26·24$
3. $\angle B = 71°38'$; $\angle C = 67°55'$; $b = 10·24$
   $\angle B = 27°28'$; $\angle C = 112°5'$; $b = 4·976$
4. $\angle C = 45°$; $\angle A = 105°$; $a = 3 + \sqrt{3}$
   $\angle C = 135°$; $A = 15°$; $a = 3 - \sqrt{3}$
5. $\angle B = 32°\ 24'$; $\angle C = 107°\ 36'$; $c = 26·14$.
6. தீர்வு இல்லை. 7. தீர்வு இல்லை.
8. $b = 3·239$; $\angle A = 24°\ 57'$; $\angle B = 18°\ 3'$.
9. செங்கோண முக்கோணம்.
   30, 90° ; 36° 52'
10. செங்கோண முக்கோணம்.
11. $\angle C = 37°\ 20'$; $\angle B = 11°\ 50'$; $b = 142$.
12. $\angle A = 42°\ 40'$; $\angle C = 26°\ 31'$; $b = 444$.

பயிற்சி 12

(1) 335·64 மீ.
(2) 12.59 மீ.
(3) 76·6 மீ.
(4) 59·6 மீ.
(5) 9·92 மீ.
(6) 80 மீ ; 220 மீ.
(7) 50 மீ.
(8) 273·2 மீ.
(9) 75·58 மீ.
(10) காலை மணி : 9·16 ; 9·54.
(11) 4·39 மீ; 6·49 மீ.
(12) 21·43 மீ.
(13) ·8163 கி. மீ.
(14) மணிக்கு 420·78 மீட்டர்கள்
(16) 221·1 மீ.
(17) 43° 10' ; 61° 21' ; 75° 30'.
(18) 125·91 செ.மீ.
(19) AC = 13·56 மீ. ; வடதிசைக்குக் கிழக்கே 37° 22' சாய்வுள்ள திசை.
(20) AB = 2160 மீ.

அனுபந்தம்

கணிதம் (Mathematics)

கலைச்சொற்கள் (Technical Terms)

Abcissa–மட்டாயம்
Accurate-திட்டமான, சரியான
Add–கூட்டு
Addition–கூட்டல்
Adjacent–அடுத்த
Algebra–இயற் கணிதம்
Algebraic symbol–இயற் கணிதக் குறியீடு
Alternate–ஒன்றுவிட்ட
Altitude–செங்கோடு, உயரம்
Ambiguous-ஈரடியான
,, case-ஈரடி வகை
Amount–தொகை
Angle–கோணம்
,, Acute–குறுங் கோணம்
,, Adjacent-அடுத்த கோணம்
,, Alternate-ஒன்றுவிட்ட கோணம்
,, Complementary-நிரப்புங் கோணம்
,, Corresponding-ஒத்த கோணம்
,, Exterior-வெளிக் கோணம்
,, Interior–உட்கோணம்
,, Obtuse–விரிகோணம்
,, of depression-இறக்கக் கோணம்
Angle of elevation–ஏற்றக் கோணம்
,, opposite-எதிர்கோணம்
,, Re-entrant–உள்ளுறு கோணம்
,, Reflex-பின்கோணம்
,, Right–செங்கோணம்
,, Straight-நேர்க்கோணம்
,, Supplementary - நிமிர்க்குங் கோணம்
,, Vertical-உச்சிக் கோணம்
,, Vertically opposite–குத்தெதிர் கோணம்
Angular - கோணத்தின், கோண
,, distance - கோணத் தொலை
,, point-கோணக் குற்று
Answer-விடை, விடைகாண், விடைகூறு
Antecedent - முன்னுறுப்பு, முன்னைய
Anti-clockwise – இடஞ்சுழியாக, இடமாக
Anti-logarithm–இன மடக்கை (இன மகை)
Apex–உச்சி

Apply - பயன் படுத்து, பொருத்து
Approximate - அணித்தான, ஏறத்தாழ,
,, Value - தோராய மதிப்பு
Approximately-தோராயமாக, ஏறத்தாழ
Approximation-தோராயம்
Arbitrary - யாதாமொரு, கட்டுப்பாடில்லாத
Arc - வில்
Area - பரப்பளவு, பரப்பு
Arithmetic - எண் கணிதம்
As (: :) போல (பொருத்தக் குறி)
Average - சராசரி
Axis - அச்சு ஆயம்
,, of Co-ordinates - ஆய அச்சுக்கள்
,, of symmetry-சமச்சீரச்சு

B

Base of a logarithm-மடக்கை யடி (மகையடி)
,, of a triangle-முக்கோண அடி
Bearing-திசைக் கோணம்
Binomial-ஈருறுப்புச் சேர்ப்பு
Bisect-சமமாய் வெட்டு, இரு சரிக்கூறிடு
Bisector-சமவெட்டி, இரு சரி வெட்டி
Bracket - அடைப்பு, அடைப் புக் குறி
,, closed - [ )] மூடிய அடைப்பு
,, curved - பிறை அடைப்பு
,, double - { }இரட்டை அடைப்பு
Bracket, open - [( ]திறந்த அடைப்பு
,, Square -[ ] பகர அடைப்பு
Breadth - அகலம்
Boundary - எல்லை

C

Calculate - கணக்கிடு
Calculation - கணக்கீடு
Cancel - நீக்கு
Case - உறுவல், வகை
,, General-பொது உறுவல்
,, Particular - குறிப்பிட்ட உறுவல்
Cent-நூறு, சதம் (நாணயம்)
Centimeter - சென்டி மீட்டர் (செ. மீ.)
Central - நடுவான, மைய மான
Centre, Center-நடு, மையம்
,, Circum-சுற்று (வட்ட) மையம்
,, Ex - வெளி (வட்ட) மையம்
,, In - உள் (வட்ட) மையம்
,, Line of-மையப் பிணை வரை
,, ortho - செங்கோட்டு மையம்
Centroid - மைய வெட்டிச் சந்தி
Characteristic (of logarithm)-(மடக்கை) முழு எண்
Chord - நாண்
Cipher - பூச்சியம்
Circle - வட்டம்
,, Circum - சுற்று வட்டம்
,, Escribed-வெளி தொடு வட்டம்
,, Inscribed-உள் தொடு வட்டம்
,, Nine-point - ஒன்பது குற்று வட்டம் (சுருக்க மாக-ஒன்பான் வட்டம்)
,, Semi-அரை வட்டம்
Circular-வட்டமான
,, measure-வட்ட முறை யளவு
Circumference - சுற்றளவு, வட்டவரை
Circumscribe - சுற்றிவரை
Clockwise-வலஞ்சுழியாக

Co-efficient-கெழு
,, detached - தனிக் கெழு
,, Numerical - எண் கெழு
Coincide - ஒன்றுபடு, பொருந்து
Coincident-ஒன்றிய, பொருந்திய
Collinear-ஒரு வரைய, ஒரு வரைமையுடைய
Collinearity-ஒரு வரைமை
Column - நிரல்
Combination-சேர்வு
Commensurable-பொது அளவுள்ள
Common tangent, direct-நேர் பொதுத் தொடு வரை
,, Transverse-மாறு பொதுத் தொடு வரை
Complement-நிரப்புவது
Complementary-நிரப்பும்
Componendo et dividendo-கூட்டுக் கழி விகிதம்
Concentric - ஒருமைய முடைய
Conclusion - முடிவு
Concur - சந்தி, கூடு
Concurrency, Point of -சந்திக்கும் புள்ளி (குற்று)
Concurrent-சந்திக்கும்
Concurrency-ஒன்றிய சந்திப்புடையது
Concyclic-ஒரே வட்ட, ஒரே வட்ட வரையிலுள்ள
condition-கட்டுப்பாடு, நிபந்தனை
Congruence-சர்வ சமம்
Congruent-சர்வ சமமுடைய
Conjugate-துணையிய
Consecutive - அடுத்தடுத்த, தொடர்ச்சியான
Consequent-பின்னுறுப்பு
Constant - மாறுத, மாறிலி, மாறிலியெண், நிலையெண்
Construct-வரை, அமை
Construction - வரை வழி, வரைவு, அமைப்பு (குறுக்கம்: வ.வ.)
Contact - தொடு
,, Point of - தொடும் புள்ளி
Contiguous - அடுத்த
Continuity-தொடர்ச்சி
Continuous-தொடர்ந்த
Contraction-சுருக்கம்
Convention-மரபு, வழக்கு
Converse-மறுதலை
Conversely-மறுதலையாக
Co-ordinate-ஆயத்தொலை
Corollary-கிளைத் தேற்றம்
Correct (to)-கிட்டிய, அணித்தான
Correspond-ஒத்திரு
Correspondence-ஒத்திருத்தல்
Corresponding-ஒத்த
,, angle - ஒத்த கோணம்
Cosine - கிடக்கை
Cotangent - எதிரிருக்கை
Counter-clockwise - இடஞ்சுழியாக
Cubed (x^3) - முப்படி
Curve - வளைவு, வளை வரை
,, Smooth - மெல்லிழை வரை
Curved - வளைந்த
Cyclic - ஒரு வட்ட

D

Dash - பிரிகோடு
Decimal - பதின்பகுப்பு
,, Point-பதின் (பகுப்பு) புள்ளி
,, Pure-தனிப் பதின் பகுப்பு
,, Recurring-மடக்குப் பதின்பகுப்பு
Deduce - பகுத்தறி
Deduction - தள்ளுபடி, பகுத்தறிதல்
Define-வரையறு
Definite-வரையறுத்த

Definition-வரையறை
Degree (of angle)-பாகை
Degree (of Equation) - சமன் பாட்டின்படி
Denominator - கீழெண் (பின்னக்)
Dependent-சார்புடைய
Depression-இறக்கம்
Describe-வரை
Deviation-சாய்வு
Diagonal-மூலை வரை, மூலை விட்டம்
Diagram-படம், விளக்கப் படம்,
Diameter-விட்டம்
Difference - மிச்சம், வேறு பாடு, வேற்றுமை
Digit-தனியிலக்கம்
Dimension-வகையளவு
Direct-நேர்
Directed Line-ஒரு போக்குக் கோடு
Direction-போக்கு
Discriminant-தன்மை காட்டி
Distance-தொலை, தூரம்
Diverge - விரி
Divide-வகு, பிரி
Dividend-வகுக்கப்படும் எண்
Divisibility-வகுபடும் தன்மை
Division-வகுத்தல்
Divisor - வகுக்கும் எண்
Double - இருபங்கு, இரு மடங்கு
Draw - வரை, இழு

E

Elevation-ஏற்றம்
Eliminate-நீக்கு, விலக்கு
Elimination-நீக்கல், விலக்கல்
Enunciation-விவரணம்
,, General - பொது விவரணம்
,, Particular-சிறப்பு விவரணம் (சி.வி.)
Equal-சமன், சமம்
Equality - சமம்
,, சமன்பாடு
Equality - Algebraic - இயற் கணிதச் சமன்பாடு
,, Linear-ஒரு படிச் சமன்பாடு
,, Member of an-சமன் பாட்டுறுப்பு
,, Quadratic-இருபடிச் சமன்பாடு
,, Simple - ஓரினச் சமன்பாடு
,, Simultaneous-ஒருங் கமைச் சமன்பாடு
,, Solution of an-சமன் பாட்டின் தீர்வு
,, Solve an - சமன் பாட்டின் தீர்வுகாண்
Equiangular-சமகோண
Equidistant - சமதூர, சம தொலைய
Equilateral - சமபக்க
Equivalent (Triangles) - சம பரப்புள்ள முக்கோணங்கள்
Estimate-மதிப்பு, திட்டம்
Escribe - வெளிவரை, புறம் வரை
Evaluate - மதிப்புக் காண், மதிப்பிடு
Even-இரட்டை, இரட்டிய
Except-விலக்கு, விலக்காக
Exception-விலக்கு
Exponent - படி
Expression - கோவை
,, Algebraic - இயற் கணிதக் கோவை
Exterior, External-வெளியே, புறத்தே
Extremes-இறுதிகள், ஈறுகள்
Extremities - நுனிகள்

F

Factor-சினை, காரண எண்
Factorisation-சினை காணல்
Figure - இலக்கம், வடிவு,
,, Geometrical - வடிவ கணிதப் படம்
,, Rectilineal - நேர்க் கோட்டுப் படம்

Figure - Significant-சிறப்பிலக்கம்
Finite-முடிவுள்ள
Fixed - நிலைத்த
Foot-அடி, பாதம்
Form - உருவம், அமைப்பு
,, Standard-திட்ட உருவம் திட்ட அமைப்பு
Formula - வாய்பாடு
Fraction - பின்னம்
,, Common-பொதுப் பின்னம்
,, Decimal - பதின் பின்னம்
,, Improper - தகா பின்னம்
,, Proper-தகு பின்னம்
,, Vulgar - பொதுப் பின்னம்
Fractional-பின்ன
Function-சார்பு, சார்பலன்
,, Explicit - வெளிப் படையான சார்பு
,, Implicit-மறை முக மான சார்பு
,, Linear-ஒரு படிச் சார்பு

G

Generalisation-பொது விதி
Generalise-பொது விதி காண், பொதுமைப் படுத்து
Geometry-வடிவ கணிதம்
,, Algebraic } இயல்
,, Analytical } முறை வடிவ கணிதம்
,, Practical - செய்முறை வடிவ கணிதம்
,, Theoretical - அறிவு முறை வடிவ கணிதம்
Gradient - சாய்வு, சாய்வு வீதம்
Graph - கோட்டுப் படம், கோட்டுருவப் படம் வரைப்படம்.

H

Height-உயரம்
Heterogeneous - கலப்பான, பலபடித்தான
Hexagon-அறுகோணம்
Homogeneous-சமபடித்தான
Horizontal - மட்டமான, படு மட்ட, கிடை
Hypoteneuse-செம்பக்கம்
Hypothesis-வைப்புக் கோள், கொள்ளப்பட்டது

I

Identical-முழுதுமொத்த
Identity-முற்றொருமை
Imaginary-கற்பனையான
Inclination-வாட்டம், சாய்வு
Incommensurable - பொது அளவற்ற
Inconsistent - முரணான,
பொருந்தாத
Indefinite-அளவுப்படாத
Independent-சார்பில்லாத, சார்பற்ற
Indeterminate - தேரப்பெறுத
Index - படிக்குறி
Index of a root-அடிக்குறி, மூலக்குறி
Induction - உய்த்தறிதல்
Inequality-சமனின்மை
Inference - தேற்றப்பாடு, முடிவு
Infinite-முடிவற்ற, கந்தழி
Infinity - கந்தழி
,, Point at-கந்தழிப்புள்ளி
Inscribe-உள்வரை
Integer-முழு எண்
Intercept-வெட்டுத்துண்டு
Interest - வட்டி
,, Compound-கூட்டுவட்டி
,, Simple-தனிவட்டி
Intersect-வெட்டு
Intersection-வெட்டுதல்
,, point of - வெட்டுப் புள்ளி, வெட்டுக் குற்று

Into (×) or Of – ஐ
Invariable – மாருத
Inverse ratio–தலைகீழ் விகிதம்
Irrational - அளவுக்கிணங்காத
Is equal to (=) – சமம்
Isosceles–இரு சமபக்க
Is to (:) - விகிதக்குறி

L

Length–நீளம், தொலை
Like - ஒத்த
Limit - எல்லை
Line – வரை, கோடு
Locus–இயங்குவழி, நியமப்பாதை
Logarithm – மடக்கை (குறுக்கம்–மகை)

M

Magnitude-அளவு
,, Decreasing order of–இறங்கு வரிசை
,, Increasing order of–ஏற்ற வரிசை
Mantissa – மடக்கை பின்னம் (குறுக்கம்–மகைபின்னம்)
Mark – குறி
Mathematics–கணிதம்
Matter-பொருள், பண்டம்
Maximum – மீப்பெரிது, மீப்பெரு
,, value – மீப்பெரு மதிப்பு
Mean – இடை
,, Arithmetic-கூட்டிடை
,, Geometric-பெருக்கிடை
,, Harmonic–இசையிடை
Measure – அளவு, அளவு கோல், அளவை
,, common – பொது அளவை
,, Greatest Common – உத்தமப் பொது அளவை (குறுக்கம் உ.பொ.அ.)
Measurement–அளத்தல்
Median - சமவெட்டி, மையக்கோடு
Method – விதி, முறை
Minimum–மீச்சிறிது, மீச்சிறு
,, value-மீச்சிறு மதிப்பு
Minus–கழி, குறை, எதிர்
,, sign(–)கழிகுறி, குறைக்குறி, எதிர்க்குறி
Minute (angle) – கலை
,, (time)–நிமிடம்
Monomial–ஒருறுப்பு, ஓருறுப்பிய
Multinomial – பல்லுறுப்புச் சேர்ப்பு
Multiple-மடங்கு, மடங்கை,
,, common – பொது மடங்கை
,, least Common–அதமப் பொது மடங்கு (குறுக்கம்–அ.பொ.ம.)
Multiplicand–பெருக்கப்படும் எண்
Multiplication – பெருக்கல்
,, cross – குறுக்குப் பெருக்கல்
,, sign (×)–பெருக்கற் குறி
Multiplier–பெருக்கும் எண்
Multiply-பெருக்கு

N

Negative–குறை, எதிர்
,, number-குறையெண்
,, quantity – குறைக் கணியம்
,, sign (–) – குறைத் தற் குறி
Normal–நேர்க் குத்துக்கோடு
Notation-குறியிடு, குறியீட்டு முறை
Number – எண்
,, Abstract – வெற்றெண்
,, Imaginary - கற்பனையெண்
,, Natural – இயற்கையெண்
,, Negative– குறையெண்

Number Ordinal – வரிசை
யெண்
,, positive-கூட்டெண்
,, real-மெய்யெண்
Number, whole-முழு எண்
Numeration-எண்ணீடு
Numerator – பகுபடும் எண்,
மேலெண்
Numerical - எண்ணுலாகிய

O

Oblique-சாய்ந்த
Odd - ஒற்றை, ஒற்றைப்படை
யான
Opposite - எதிர்
Order – நிரை, வரிசை
Ordinate - குத்தாயம்
Origin – ஆய ஆதி
Ortho centre – செங்கோட்டு
மையம் (சந்தி)

P

Pair-இணை, இணையான
Parabola-தொடு வளைவு
Parallel – ஒரு போகு
,, line-ஒரு போகுவரை
Parallelism-ஒரு போகு நிலை
Parallelogram – இணைக்கரம்
(□ கரம்)
Partial – பகுதியான
Particular-சிறப்பான
Pattern-மாதிரி
Pedal-(செவ்) அடியாய
Pedal triangle-செவ்வடி முக்
கோணம்
,, line - செவ்வடியாயக்
கோடு
Pentagon-ஐங் கோணம்
Perimeter-சுற்றளவு
Permutation-அடுக்கு, வரிசை
மாற்றம்
Perpendicular-குத்துக் கோடு,
செங்குத்துக் கோடு
,, bisector – செங்
குத்து மைய வெட்டி
Plane – தளம்
Plot - இடங்குறி
Plus - கூட, கூட்டு, சேர்
Plus sign (+)-கூட்டற் குறி
Point-புள்ளி, குற்று, நுனி,
முனை
Polygon-பல்-கோணம்
Polynomial – பல்லுறுப்புச்
சேர்ப்பு
Position – நிலை, இடம்
Positive – நேர்க்கை, நேர்,
கூட்டு, மிகை
,, number-கூட்டெண்
,, quantity - கூட்டுக்
கணியம்
Postulate-ஒப்புக் கொள், ஒப்
புக்கோள்
Power – படி (இருபடி, முப்
படி......)
Practical-செய்முறையான
Prime number - பகாவெண்
Principal-முதல், அசல்
Principle - விதி
Problem-கணக்கு, கேள்வி
Process-வழி, செய்முறை
Product-பெருக்குத் தொகை
,, Continued - தொடர்ப்
பெருக்கம்
Progression-தொடர்
,, Arithmetic-கூட்டுத்
தொடர்
,, geometric - பெருக்
குத் தொடர்
,, harmonic – இசைத்
தொடர்
Proof – தெரிப்பு
,, analytical – பகுமுறைத்
தெரிப்பு
,, formal – முறைத்
தெரிப்பு
,, indirect - மறை முகத்
தெரிப்பு
,, inductive - தொடர்
முறைத் தெரிப்பு
,, theoretical – தேற்ற
முறைத் தெரிப்பு
Property - பண்பு
Proportion – விகிதப் பொருத்
தம்

Proportion - continued - தொடர் (விகிதப்) பொருத்தம்
,, direct-நேர் விகிதப் பொருத்தம்
,, extremes of-பொருத்த ஈறுகள்
,, inverse - தலைகீழ் விகிதப் பொருத்தம்
,, means of-விகித சம இடை
Proportional - விகிதப் பொருத்தமுடைய
,, fourth - விகித சம நான்காம் உறுப்பு
,, mean - விகித சம இடை
Proposition - தேற்றம், தெரிவு
Prove - நிறுவு
Pyramid-பட்டைக் கூம்பு
,, Triangular - முப்பட்டைக் கூம்பு

Q

Quadrangle - நாற்கோணம்
Quadrant - வட்ட நாற்கூறு
Quadratic - இருபடி
Quadrilateral - நாற்கரம்
Quantity-கணியம், இராசி
,, Unknown - தேராக் கணியம்
Quotient-ஈவு

R

Radian - ஆரையன்
Radian measure-ஆரையன் அளவை
Radical-படி மூலம், படி மூல முடைய
Radius-ஆரம், ஆரை, அரை விட்டம்
,, Circum-சுற்று வட்ட ஆரம்
,, in-உள்வட்ட ஆரம்
Range - வரிசை, வீச்சு
Range harmonic - இசை வரிசை
Rate - வீதம்
Ratio - விகிதம்
,, Antecedent of - விகித முன்னுறுப்பு
,, common-பொது விகிதம்
,, consequent of - விகிதக் கடை (ஈறு) விகிதப் பின்னுறுப்பு
,, direct - நேர்விகிதம்
,, duplicate - இருபடி விகிதம்
,, geometric- பெருக்கு (த் தொடர்) விகிதம்
,, inverse-தலைகீழ் விகிதம்
Rational-அளவுக் கிணங்கிய
Reason-ஏது, காரணம்
Rectangle-செவ்வகம்
Rectilineal-நேர் வரைய
,, figure நேர் வரைப் படம்
Recur-மடங்கி வருகிற
Recurring-மடக்கு
,, decimal - மடங்குப் பதின் பின்னம்
Reduce - சுருக்கு
Reduction-சுருக்கம்
Regular - ஒழுங்கான, முறை யான
Relative-சார்ந்த, பற்றிய
Remainder - மிச்சம்
,, theorem - மிச்சத் தேற்றம்
Represent-வகை, குறி
Representation - வகைக் குறிப்பு
Resolution-கூறுபாடு
Resolve-கூறுபடுத்து, பெருக் குறுப்புக்காண்
,, into factors - சினை (காரணி) காண்
Respectively-முறையே
Result-ஈவு, பயன், முடிவு
Reverse - மாறுபட்டது, முன் பின்னக்கு, புரட்டு
Revolution - சுற்று
Rhombus-சாய் சதுரம்

Ring - வளையம்
Root - சமன்பாட்டின் தீர்வு, மூலம்
,, cube-முப்படி மூலம்
,, extraneous-பொருந்தாத் தீர்வு
,, imaginary - கற்பனைத் தீர்வு
,, irrational - அளவுக் கிணங்காத தீர்வு
,, rational-அளவுக் கிணங்கிய தீர்வு
,, real-மெய்யெண் தீர்வு
,, square - இருபடி மூலம்

S

Scale - அளவுச் சட்டம்
Scalene - அசமபக்க
Secant-வெட்டுவரை
Second (angle) - விகலை கோணம்
Second (time)-வினாடி, நொடி (காலம்)
Section - வெட்டு முகம்
,, cross-குறுக்கு வெட்டு முகம்
Sector-வட்டக் கோணப்பகுதி
Segment-துண்டு
,, alternate-மாற்று (வட்டத் துண்டு)
,, of a circle - வட்டப் பகுதி, வட்டத் துண்டு
Sense - போக்கு
Sequence - பின் வருகை, தொடர் முறை
Series - தொடர்
,, ascending-ஏறு தொடர்
,, convergent - எல்லையுள் தொடர்
,, descending - இறங்கு தொடர்
,, divergent - எல்லையில் தொடர்
Series infinite - முடிவற்ற தொடர்
Set square-மூலை மட்டம்
Sexagesimal-அறுபான் பகுப்பு
Side-பக்கம், பக்கவரை
Sign-குறியீடு, அடையாளம்
Significant - குறிப்புடைய
Similar-வடிவொத்த
Similarity-ஒருவடிவுடைமை
Simplify-சுருக்கு
Simultaneous-ஒருங்கமை
Sine (of angle) - கோண நெடுக்கை
Size - பருமன், பருமை
Sketch - சுருக்கப் படம், வரைப்படம்
Slant height-சாய்வு உயரம்
Slope-சரிவு, வாட்டம், சாய்வு
Solution - தீர்வு, விடை
Solve-தீர், விடுவி
Space-வெளி, இடம்
Span - இடைவெளி
Square-சதுரம், இருபடி
Squared (x^2) - xன் இருபடி
Standard - திட்டம், திட்ட அளவு
,, form-திட்ட அமைப்பு
,, unit-திட்ட அலகு
Straight - நேர், நேரான, நேரிய
Sub-multiple - கீழ் மடங்கை
Substitute-ஈடுசெய், மாற்று, ஈடாக்கு
Substitution - ஈடு செய்தல், மாற்றல்
Subtend-எதிர் வீழ்த்து, தாங்கு
Subtract-கழி
Subtraction-கழித்தல்
Sum - மொத்தம், கூட்டுத் தொகை
Summation-கூட்டல்
Summarise - தொகு, தொகுத்துக் கூறு, சுறுங்கக்கூறு
Summary-தொகுப்பு, சுருக்கம்
Supplement (angle) - நிமிர்க்கும் கோணம்
Supplementary-நிமிர்க்கும்
Surd - படிமூலம்
Surface-புறப்பரப்பு
Symbol - அடையாளம், குறியீடு

Symbolic representation-குறியீட்டாற் காட்டுகை
Symmetric-சமச்சீருள்ள
Symmetry-சமச்சீர்
Synthesis-தொகுப்பு
System-முறை

T

Table-வாய்பாடு
Tabulate - நிரலிடு
Tangent - தொடுவரை
,, (Trig)-இருக்கை
Tend-நோக்கு, அணுகு
Tendency-நோக்கம்
Term-உறுப்பு
,, absolute - சார்பில் உறுப்பு, நிலைத்த உறுப்பு
Terminate-முடிவுசெய்
Termination-முடிவு, இறுதி
Theorem-தேற்றம்,
Theory-கொள்கை
Total-மொத்தம்
Trace - மேல்வரை
Transposition-இடமாற்றம்
Transversal-குறுக்குக் (வெட்டுங்) கோடு
Trapezium - சரிவகம்
Triangle-முக்கோணம்
,, equilateral - சம பக்க முக்கோணம்
,, isosceles-இருசமபக்க முக்கோணம்
,, scalene-அசம பக்க முக்கோணம்
Trigonometry - கோண கணிதம்
Trinomial - மூவுறுப்புச் சேர்ப்பு
Trisect-முச்சரி கூறிடு

U

Undetermined-தேரா
Unit - அலகு
,, derived - வழியலகு, சார்பலகு
,, fundamental- அடியலகு
Unity-ஒன்று
Universal-அனைத்துக்கும் பொதுவாய்
Unlike-ஒவ்வாத
Unlimited-எல்லை கடந்த

V

Value absolute - தனி மதிப்பு
,, limiting-எல்லை மதிப்பு
,, turning-திரும்பு மதிப்பு
Vanish-தேய்
Variable-மாறி, மாறும்
,, dependent - சார்புடை மாறி
,, independent - சார்பில் மாறி
Verify - சரிபார்
Verification-சரிபார்த்தல்
Vertex-கோண உச்சி, உச்சி, முனை
Vertical-செங்குத்தான
Vetically opposite - குத்தெதிரான
Vinculum- தொகுப்புக்கோடு, அடைப்புக்கோடு
Volume - பருவம், பருமை, கன அளவு
Weight-நிறை, எடை
Width-அகலம்
X to the power of 4 - x படி நான்கு
Zero-பூச்சியம், சுன்னம், சுழி

புகுமுக வகுப்பிற்குரிய நூல்கள்
(Books for the P.U.C.)

—o—

1.	உலக வரலாறு (1789—1960)	—T. R. இராமச்சந்திரன்
2.	பொருளாதாரம்	—G. சிதம்பரம்
3.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்-I	—K. ஆளுடையபிள்ளை
4.	,, II	
5.	பௌதிகம்	—டாக்டர் P. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராசன்
6.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்-I	—K. இராஜகோபாலன்
7.	,, II	,,
8.	வேதியியல்	—T. முனியப்பன், R. முத்துலட்சுமி
9.	புகுமுக விலங்கியல்	—P. M. அண்ணாமலை
10.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்-I	—T. கோவிந்தராசன், K. முத்துசாமி
11.	,, II	— ,,
12.	விலங்கியல்	—S. ஆப்ரகாம்
13.	கணிதம்-ஓர் அறிமுகம்-I	—R. மகாதேவன்
14.	,, II	—
15.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	—S. சுந்தரம்
16.	புகுமுக பௌதிகம்	—டாக்டர் M. A. தங்கராஜ்
17.	புகுமுக வேதியியல்	—C. A. பத்மநாபன்